ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

José Antonio Nuñez-Mora*

Departamento de Finanzas, Tec de Monterrey Campus Ciudad de México

(Recibido 2 de julio 2001, aceptado 24 de noviembre 2001)

Resumen

En este trabajo, se desarrolla un método de estimación de los coeficientes de difusión de ecuaciones diferenciales estócasticas. Nuestra propuesta se basa en el modelo de Zane (1994) con algunas modificaciones esenciales. Los estimadores obtenidos de los coeficientes son fuertemente consistentes. A manera de ilustración, se presenta un ejemplo de aplicación del método desarrollado.

Abstract

In this paper, we develop a method to estimate the diffusion coefficients of stochastic differential equations. Our proposal is based on the Zane's (1994) model with some esential modifications. The obtained estimators of the coefficients are strongly consistent. An application is addressed, by way of illustration, for using the proposed method.

Clasificación JEL: C63.

Palabras clave: Estimación paramétrica, Ecuaciones diferenciales estocásticas.

* Departamento de Finanzas, Tec de Monterrey Campus Ciudad de México, Calle del Puente 222, Col. Ejidos de Huipulco, Del. Tlapan, México, D. F. Teléfono (52)54832240, Correo Electrónico: jnunez@campus.ccm.itesm.mx

El autor desea agradecer al editor principal y a dos dictaminadores anónimos sus valiosos comentarios.

1. Introducción

En los últimos años, las técnicas de valuación de instrumentos financieros han experimentado cambios y transformaciones profundas. Estos cambios han fomentando el uso de las ecuaciones diferenciales estocásticas, o sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas, como una de las herramientas básicas para describir el comportamiento de activos y sus derivados. Los parámetros asociados a ecuaciones diferenciales estocásticas representan tendencias, reversiones, volatilidades, correlaciones, *etcétera.* Si no se cuenta con métodos eficientes de estimación de dichos parámetros, entonces cualquier teoría de valuación que descanse en estos conceptos se torna completamente inútil.

La estimación de los parámetros de una ecuación diferencial estocástica es una tarea indispensable en la práctica, ya que con base en modelos de difusión es posible diseñar portafolios que reflejen el grado de exposición al riesgo que un agente (inversionista) esté dispueto a tolerar. Sin embargo, la estimación de los parámetros, en general, es una labor difícil ya que, por un lado, las complicaciones técnicas son abrumadoras y, por otro lado, los métodos disponibles, en su mayoría, presentan complicaciones técnicas para ser instrumentados en una computadora personal.

En este trabajo, se desarrolla un método de estimación de los coeficientes de difusión de ecuaciones diferenciales estócasticas. Nuestra propuesta se basa, con algunas modificaciones, en el modelo de Zane (1994). En este caso, los estimadores de los coeficientes son consistentes. Las principales características del método de estimación propuesto son:

1) se fundamenta en un marco teórico consistente;

2) considera explícitamente la sensibilidad a la fecha de valuación;

3) produce estimadores fuertemente consistentes;

4) actualiza la estimación en forma inmediata cuando hay más información disponible.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta el problema de estimación de los parámetros de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. En la sección 3, se discute sobre la consistencia de los estimadores de los parámetros de difusión. En la sección 4, a manera de ilustración, se presenta un ejemplo de aplicación. Finalmente, en la sección 5, se presentan las conclusiones y la agenda de investigación futura.

2. El Problema de Estimación

En términos generales, los parámetros asociados a un sistema de ecuaciones diferenciales representan tendencias, volatilidades o correlaciones. Considere el movimiento geométrico Browniano:

$$\mathrm{d}X(t) = bX(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W(t),$$

donde b es el parámetro de tendencia, σ es la volatilidad instántanea y $\mathrm{d}W(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$. En este caso, dado un registro histórico, $X(0), X(1), ..., X(n)$, en intervalos iguales de tiempo $\mathrm{d}t$, un par de estimadores insesgados para b y σ^2 están dados por:

$$\tilde{b}_u = \frac{1}{n\mathrm{d}t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X(i+1) - X(i)}{X(i)}$$

y

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{(n-1)\mathrm{d}t} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{X(i+1) - X(i)}{X(i)} - \tilde{b}_u \right)^2$$

Los estimadores de máxima verosimilitud se determinan a partir del siguiente sistema (véase, por ejemplo, Gourieroux y Jasiak, 2001):

$$\tilde{m} = \frac{1}{n\mathrm{d}t} \sum_{i=0}^{n-1} (\log[X(i+1)] - \log[X(i)]),$$

$$\tilde{\sigma}_v^2 = \frac{1}{n\mathrm{d}t} \sum_{i=0}^{n-1} ((\log[X(i+1)] - \log[X(i)]) - \tilde{m})^2$$

y

$$\tilde{b}_v = \tilde{m} + \tfrac{1}{2}\tilde{\sigma}_v^2.$$

En esta investigación, se presenta el problema de estimación de los coeficientes de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales estócasticas bilineales:

$$\mathrm{d}X_i(t) = b_i X_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} X_i(t) \mathrm{d}W_j(t), \qquad i = 1, 2, ..., N. \tag{1}$$

donde b_i son los parámetros de tendencia y $A = (A_{ij}) \equiv (\sigma_{ij})(\sigma_{ij})^T$ es la matriz de parámetros de volatilidades (el superíndice T denota la operación de transponer). Asimismo, los procesos estocásticos $W_j(t)$ son procesos de Wiener estandarizados (también llamados movimientos Brownianos), es decir, $W_j(t)$ es una variable aleatoria normal con incrementos temporales independientes, la cual satisface $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_j(t)] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_j(t)] = \mathrm{d}t$. Este modelo es ampliamente utilizado para modelar el comportamiento de precios de activos financieros que se encuentran correlacionados entre sí. En la siguiente sección, se determina un conjunto de estimadores fuertemente consistentes del vector (b_i) y la matriz $A = (A_{ij})$.

3. Construcción de Estimadores

La idea central de nuestro método para obtener estimadores de un sistema de ecuaciones diferenciales estócasticas se basa, principalmente, en una discretización del modelo de tiempo continuo establecido en (1). Se observa que un primer conjunto de estimadores de los parámetros de tendencia del modelo de tiempo continuo (1), están dados por (Duncan y Duncan, 1989, 1989a):

$$b_i^c(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\mathrm{d}X_i(s)}{X_i(s)}, \tag{2}$$

cuya discretización es:

$$\hat{b}_i^\delta(k) = \frac{1}{k\delta}\sum_{l=1}^{k} \frac{X_i(t_l^\delta) - X_i(t_{l-1}^\delta)}{X_i(t_{l-1}^\delta)}, \tag{3}$$

donde δ es el intervalo de tiempo entre observaciones. En la práctica las observaciones son discretas en el tiempo. Como se observa en Zane (1994), se define primero la siguiente función de $\hat{b}_i^\delta$, $i = 1, 2, ..., N$, mediante

$$Q(\delta, i, k) = \delta\hat{b}_i^\delta + 1. \tag{4}$$

En este caso, un estimador consistente para $b_i, i = 1, 2, ..., N$, se obtiene mediante la regla

$$\tilde{b}_i^\delta(k) = \begin{cases} \log[Q(\delta, i, k)]/\delta & \text{si } Q(\delta, i, k) > 0, \\ \tilde{b}_i^\delta(k-1) & \text{en caso contrario,} \end{cases} \tag{5}$$

donde denotaremos a $\tilde{b}_i^\delta(0)$ como una constante arbitraria, el valor $\delta > 0$ es determinado por la discretización en la sucesión $\{t_k^\delta = k\delta\}_{k=0}^{\infty}$. Esta última consideración es necesaria debido a que el estimador $\hat{b}_i^\delta$ es sesgado, ya que

$$\lim_{k\to\infty} \hat{b}_i^\delta(k) = \frac{\exp\{\delta b_i\} - 1}{\delta} \tag{6}$$

depende de $\delta > 0$. Para el caso de un estimador de A_{ij}, se propone

$$R(\delta, i, j, k) = \delta\hat{A}_{ij}^\delta(k) - 1 + \exp(\delta\tilde{b}_i^\delta) + \exp(\delta\tilde{b}_j^\delta).$$

Como ya hemos calculado los estimadores $\tilde{b}_i^\delta$, entonces es fácil calcular el estimador de $\tilde{A}_{ij}^\delta$ mediante una regla recursiva. En Zane (1994), se utilizan los términos $\hat{b}_i^\delta(k)$. El estimador consistente se define ahora mediante la ecuación recursiva:

$$\tilde{A}_{ij}^\delta = \begin{cases} (\log[R(\delta, i, j, k,)]/\delta) - \tilde{b}_i^\delta - \tilde{b}_j^\delta & \text{si } R(\delta, i, j, k) > 0, \\ \tilde{A}_{ij}^\delta(k-1) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En tiempo continuo obtenemos el estimador

$$A_{ij} = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d(X_i(s)X_j(s))}{X_i(s)X_j(s)} - b_i^c(t) - b_j^c(t)$$

y la discretización correspondiente está dada por

$$\begin{aligned}\hat{A}_{ij}^{\delta}(k) = & \frac{1}{k\delta}\sum_{l=1}^{k}\frac{X_i(t_l^{\delta})X_j(t_l^{\delta}) - X_i(t_{l-1}^{\delta})X_j(t_{l-1}^{\delta})}{X_i(t_{l-1}^{\delta})X_j(t_{l-1}^{\delta})} \\ & - \frac{X_i(t_l^{\delta}) - X_i(t_{l-1}^{\delta})}{X_i(t_{l-1}^{\delta})} - \frac{X_j(t_l^{\delta}) - X_j(t_{l-1}^{\delta})}{X_j(t_{l-1}^{\delta})}.\end{aligned} \tag{7}$$

Por lo tanto, la ley recursiva es necesaria ya que (7) es un estimador sesgado (Bielecki y Frei, 1993):

$$\lim_{k\to\infty} \hat{A}_{ij}^{\delta}(k) = \frac{\exp(\delta(b_i + b_j + A_{ij})) - \exp(\delta b_i) - \exp(\delta b_j) + 1}{\delta}.$$

Podemos observar que el estimador es (fuertemente) consistente. Es decir,

$$\tilde{A}_{ij}^{\delta}(k) \to A_{ij} \quad \text{casi dondequiera}$$

ya que

$$R(\delta, i, j, k) \to \exp\{\delta(b_i + b_j + A_{ij})\} \quad \text{casi dondequiera,}$$

entonces resulta:

$$\frac{\log[R(\delta, i, j, k)]}{\delta} \to b_i + b_j + A_{ij} \quad \text{casi dondequiera.}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\log[R(\delta, i, j, k)]}{\delta} - \tilde{b}_i^{\delta}(k) - \tilde{b}_j^{\delta}(k) \to A_{ij} \quad \text{casi dondequiera,}$$

lo que concluye esta sección.

4. Ejemplo de Aplicación

Una vez que se ha descrito en forma analítica el método de estimación, se ilustra su aplicación. Suponga que los parámetros verdaderos de un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas están dados por:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 1.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

y

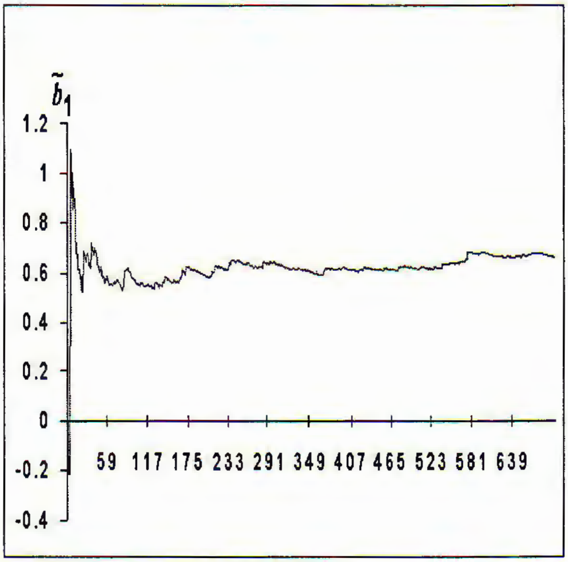
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.98 & 1.05 \\ 1.05 & 1.25 \end{pmatrix}$$

Si se utilizan las ecuaciones recursivas (5) y (7), y se simulan 700 datos, se obtienen los siguientes estimadores

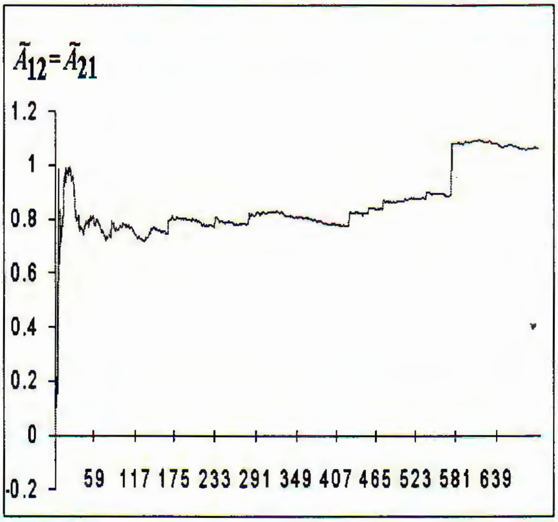
$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6624 \\ 0.5885 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9885 & 1.0609 \\ 1.0609 & 1.2310 \end{pmatrix}$$

En las gráficas 1-5 se presentan estimaciones de los parámetros b_i y A_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

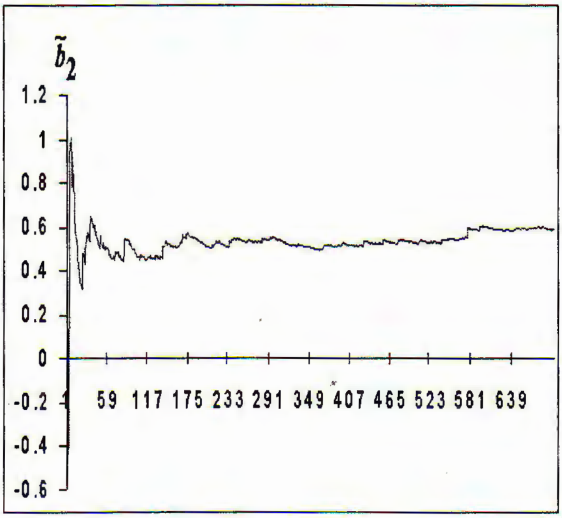
Gráfica 1. Estimación del parámetro b_1.



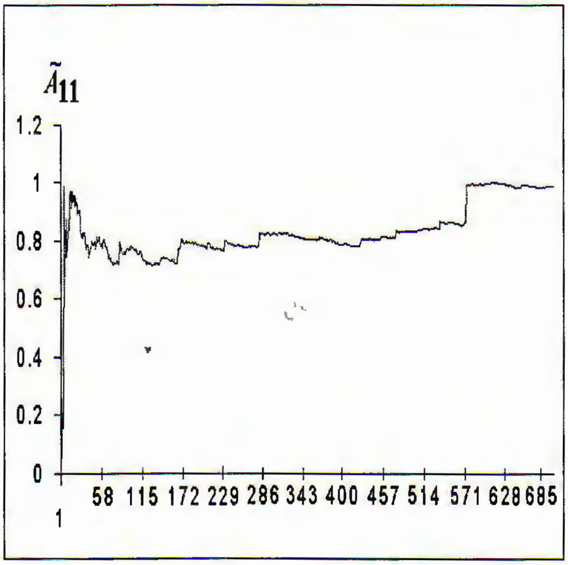
Gráfica 2. Estimación del parámetro $A_{21} = A_{12}$.



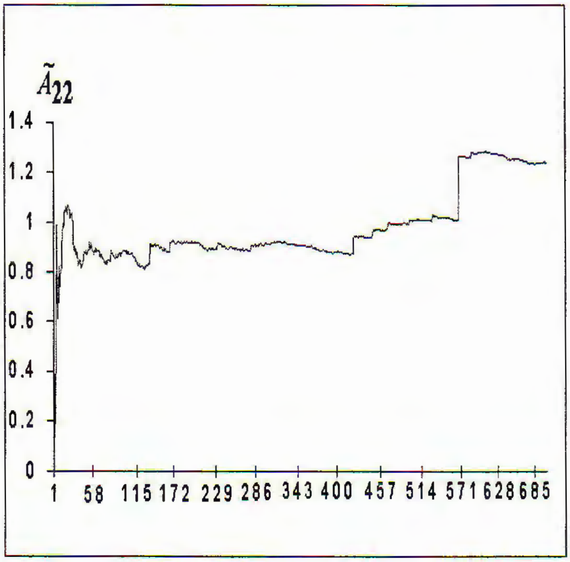
Gráfica 3. Estimación del parámetro b_2.



Gráfica 4. Estimación del parámetro A_{11}.



Gráfica 5. Estimación del Parámetro A_{22}.



5. Conclusiones

Se ha desarrollado un método de estimación de los coeficientes de difusión de ecuaciones diferenciales estócasticas. Nuestra propuesta se basan en el modelo de Zane (1994). En este caso, los estimadores de los coeficientes son fuertemente consistentes. A manera de ilustración, se ha desarrollado un ejemplo de aplicación.

En el trabajo de Zane (1994), se obtuvieron estimadores de los parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas comúnmente usadas en finanzas. En el trabajo presentado aquí, se obtienen estimadores consistentes en el sentido fuerte de la matriz de volatilidades (en su forma cuadrática), éstos estimadores están basados en los estimadores de las tendencias de las ecuaciones diferenciales. Es decir, no sólo se han obtenido estimadores consistentes, sino además, el tiempo de cálculo es menor al presentado en Zane, puesto que se calculan menos términos en el proceso recursivo.

Bibliografía

Bielecki, T. R., and M. Frei (1993). Identification and Control in the Partially Known Merton Portafolio Selection Model. *Journal of Optimization, Theory and Applications*, 77(2), pp. 399-420.

Duncan, T. E., and B. P. Duncan (1989). Adaptative Control of a Continuous-Time Model. *Journal of Optimization, Theory and Applications*, 61(1), pp. 47-52.

Duncan, T., E., and B. P. Duncan (1989a). Rate of Convergence for an Estimator in a Portafolio and Consumption Model, *Journal of Optimization, Theory and Applications*, 61(1), pp. 53-59.

Gourieroux, C., and J. Jasiak (2001). Financial Econometrics. Princeton Series in Finance, Princeton University Press.

Karatzas I., and S. Shreve (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, New York.

Zane, O. (1994). Identification of Parameters with Convergence Rate for Bilinear Stochastic Differential Equations. *Ulam Quaterly.*