INVERSIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

Elvio Accinelli*

Universidad Autónoma Metropolitana-Xochimilco

(Recibido 13 de noviembre 2003, aceptado 20 de marzo 2004)

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo fundamental relacionar la teoría del Equilibrio General con la Moderna Teoría de Finanzas, en una economía que presenta una cantidad finita de bienes contingentes y un mercado para activos financieros, un número finito de agentes que se caracterizan por su dotación inicial de bienes y por sus utilidades. La teoría se construye suponiendo que los agentes presentan utilidades intertemporales con indeterminación en los estados de la naturaleza. Se analizan condiciones suficientes para la existencia del equilibrio, como equilibrio de bienes y activos, se muestra su eficiencia y se presenta una condición suficiente para la unicidad del equilibrio. Finalmente se caracterizan los retornos de activos que siguen procesos de Itô y se relacionan con la teoría del Modelo de Consumo Basado en el Precio de Activos (CAPM).

Abstract

The aim of this paper is to relate the General Equilibrium Theory to the Modern Finance Theory, in an economy with a finite amount of contingent goods and a market for financial assets, a finite number of agents who characterize by initial endowments of goods and utility funtions. The theory is built assuming that the agents display intertemporary utilities with indetermination in the states of the nature. Sufficient conditions for the existence of equilibrium are analyzed, like equilibrium of goods and assets. We show its efficiency and get a sufficient condition for the uniqueness of equilibrium. Finally the returns of assets are characterized that follow processes of Itô and they are related to the CAPM.

Clasificación JEL: G11, G14

Palabras clave: Elección de portafolios, Información y eficiencia de mercado

* Universidad Autónoma Metropolitana-Xochimilco. Edificio A-2do piso. Posgrado en Ciencias Económicas. Calzada del Hueso 1100. Colonia Villa Quietud México D.F. Correo electrónico: elvio@cueyatl.uam.mx

1. Introducción

Este trabajo pretende presentar en forma unificada una serie de resultados ya conocidos de la moderna teoría de finanzas, en el marco de la teoría del Equilibrio General a la manera de Duffie(1996) o Karatzas, Lakner, Leoczky, and Shreve (1991).

Se presentan condiciones suficientes para la existencia del equilibrio en una economía con infinitos bienes contingentes y activos, se muestra que en condiciones muy generales se puede garantizar la Pareto Optimalidad del equilibrio, y su unicidad. Se dan condiciones que validan la utilización de los Modelos de Consumo-Capital y Activos (CAPM y CCAPM). Se presenta un ejemplo que muestra desviaciones respecto a la eficiencia cuando se imponen restricciones adicionales al modelo CAPM. En el trabajo se considera un conjunto de consumo como subconjunto de un espacio de dimensión infinita, para no perder generalidad no se considera la existencia de la función exceso de demanda como instrumento para caracterizar el conjunto de equilibrios, utilizándose como alternativa la función de exceso de utilidad. La condición suficiente para la unicidad es la aplicación a esta función del Teorema de Chichilnisky sobre invertibilidad global de funciones.

El trabajo se desarrolla de la siguiente manera: En la sección 2, se presentan las hipótesis básicas del trabajo y se discute su generalidad, se da una condición necesaria y suficiente para la unicidad del Equilibrio Walrasiano en una economía sin activos. La siguiente sección está destinada a mostrar la existencia del Equilibrio Walrasiano en un mercado con activos financieros, bajo las hipótesis asumidas y se muestra su eficiencia. En la sección 4 se discute la dinámica del modelo y se muestra la pérdida de unicidad local para los posibles caminos de equilibrio. Finalmente discutimos la aplicación del modelo CAPM a modelos de optimización intertemporal.

2 Equilibrio General: La teoría del valor en mercados para infinitos bienes de consumo

En esta sección se presenta el modelo intertemporal de Arrow en forma extendida, sobre un continuo de estados posibles de la naturaleza (Arrow (1964)). Se define el equilibrio y se estudian condiciones que garantizan su existencia y unicidad en un marco donde no necesariamente existe la función de demanda.

2.1 El Modelo de Arrow en forma extendida

En el presente modelo, los estados posibles de la naturaleza, forman un espacio de probabilidad, $\mathcal{P}=\{\mu\ ,\mathcal{B}\ ,\Omega\}$, donde μ es una medida de probabilidad sobre el conjunto de estados posibles de la naturaleza Ω y $\mathcal{B}$ una filtración sobre Ω, siendo $\{\mathcal{B}_t\}_{t=1}^{t=T} \subset \mathcal{B}$ una colección creciente de sigmas álgebras definida sobre Ω. Como es usual $\mathcal{B}_0$ contiene todos los subconjuntos de Ω con probabilidad cero, mientras que $\mathcal{B}_t$ representa la información sobre los verdaderos estados de la naturaleza, disponible en el tiempo t, el hecho de suponer que $\mathcal{B}_{t-1} \subset \mathcal{B}_t$ supone que no se pierde información.

Consideramos aquí una economía, primeramente sin activos financieros, en la que un número n finito de agentes intenta obtener un plan óptimo de consumo sobre l bienes contingentes a los estados de la naturaleza. Dado que cada agente buscará obtener su mejor plan de consumo, desde $t = 0$ y para todo estado posible de la naturaleza, cuya distribución es *apriori* conocida, decimos que la economía presenta un conjunto infinito de bienes. Cada agente económico será representado por sus dotaciones iniciales y por su función de utilidad.

Las dotaciones iniciales de cada agente, serán consideradas como un proceso estocástico de dimensión l que satisface:

$$\mathrm{E}\int_0^T w_{ij}(t)w_{ij}(t)\mathrm{d}t < \infty; \quad i = \{1, 2, ..., n\}, \quad j = \{1, 2, ..., l\},$$

definido en el espacio de consumo:

$$B = \left[\{c_i\}_{i=1}^{i=n} : \mathrm{E}\int_0^T c_{ij}(t)c_{ij}(t)\mathrm{d}t < \infty;\right].$$

Cada agente tiene una función de utilidad $\mathcal{U}_i(c) : B \to R$ separable en el tiempo y en los estados de la naturaleza, definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{U}_i(c) = \mathrm{E}\left[\int_0^T u_i(c(t), t)\mathrm{d}t\right],$$

con las siguientes propiedades:

i) Para cada $t \in [0, T]$, $u_i(\cdot, t)$ es estrictamente cóncava y estrictamente creciente, esto significa que $u_i(\bar{c}, t) > u_i(c, t)$, cada vez que $c(t) \leq \bar{c}(t)$ siendo $\bar{c} \neq c$.

ii) Existen y son continuas las derivadas hasta el segundo orden de las funciones de utilidad y además suponemos que existen:

$$A_i(t) = \{A_{i1}(t), A_{i2}(t), ..., A_{il}(t)\} \text{ y } B_i(t) = \{B_{i1}(t), B_{i2}(t), ..., B_{il}(t)\}$$

funciones integrables para las que $\partial u_i(c(t)) \leq -\partial^2 u_i(c(t))[A_i(t)c(t) + B_i(t)]$, para todo c individualmente racional.

iii) Para cada agente, numerado con $i = \{1, 2, ..., n\}$ se satisface la llamada condición de Inada, esto es: $\lim_{c(t)\to fr(B_+)} |\partial u_i(c, t)| = \infty$.

Donde por $fr(B_+) = \{c \in B$: tales que $c_j(t) = 0\}$ para algún $j \in \{1, 2, ..., l\}$ y algún $t \in [0, T]$. O bien, para cada agente y cada $c(t) \in fr(B_+)$ existe $\bar{c}(t)$ tal que $u_i(\bar{c}(t)) > u_i(c(t))$.

El sistema de precios asociados a los bienes se definirá como un proceso de precios a la vista, será un elemento del espacio B^*, dual de B que representará en cada estado de la naturaleza el precio de cada bien integrante de la cesta de consumo $c \in B$. Un proceso $c \in B$ será financiado pagando $\mathrm{E}(\int_0^T p(t)c(t)\mathrm{d}t)$ unidades de cuenta, obsérvese que $p(t)c(t)$ es el producto euclideano en R^l.

2.2 Descripción del Equilibrio Walrasiano

El equilibrio Walrasiano puede describirse en estas condiciones, como un proceso de consumo factible: $c \in B$, tal que $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(t), j = \{1, 2, ..., l\}$, y un precio definido por un funcional no nulo $P : B \to R$, tal que c puede ser comprado en el instante $t = 0$ a precio $P(c)$ y tal que cada agente i resuelve el siguiente programa de optimización:

$$\sup_{c \in B} \mathcal{U}_i(c), \text{ sujeto a}: \ P(c) \leq P(w_i).$$

Donde P es representado por l funciones estrictamente positivas p (la representación de Riesz de P) de forma tal que:

$$P(c) = \mathrm{E}\bigg(\int_0^T p(t)c(t)\mathrm{d}t \bigg), \quad c \in B.$$

Como es sabido, para economías con infinitos bienes, la existencia de la función de demanda no surge como un resultado necesario de un proceso de maximización restringido a la región presupuestaria (Araujo (1987)). Esto ciertamente supone una desventaja en el momento de caracterizar el conjunto de los equilibrios walrasianos, no obstante son conocidos muchos trabajos en los cuales se resuelve el problema de obtener condiciones de existencia para el equilibrio (véase Araujo and Monteiro (1989), Bewley (1969) y Mas-Colell (1986)) con técnicas diferentes en cada caso. Considerando economías donde cada agente es representado por una función de utilidad $\mathcal{U}_i$ separable, estrictamente cóncava, monótona, con gradiente tal que $\lim_{k \to fr(R^l_+)} ||\partial u_i(k)|| = \infty$. Donde por $fr(R^l_+)$ entendemos la frontera del ortante positivo de R^l. En Accinelli (1996) la introducción de la función exceso de utilidad, permite resolver el problema de la existencia del equilibrio para economías con infinitos bienes, sin recurrir a la función demanda. La función exceso de utilidad permite introducir un orden parcial en el espacio de los pesos sociales, mostrando a partir del Teorema de Fann, la existencia de al menos un elemento maximal, al que corresponde un único par dual $(c, p) \in B \times B^*$ de equilibrio.

La condición impuesta sobre el comportamiento del gradiente de las funciones de utilidad en el borde del ortante positivo, junto con el supuesto de que cada agente tiene dotaciones iniciales no nulas para casi todo estado de la naturaleza, implican que la asignación de equilibrio es un punto interior para todo $t \in [0, T]$ y casi todo estado de la naturaleza.

2.3 Función exceso de utilidad

La función exceso de utilidad se construye a partir de la resolución a la Negishi del proceso de optimización llevado adelante por los agentes de la economía. Para esto se caracterizan los óptimos de Pareto como las cestas de consumo que para algún $\lambda \in \Delta^{n-1}$ siendo:

$$\Delta = \left[\lambda \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_i > 0, \ i = 1, 2, ..., n \right],$$

simplex positivo de dimensión $(n-1)$ lo cual resuelve el problema:

$$\max_{c\in B}\ \mathcal{U}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathrm{E}\left[\int_0^T u_i(c_i(t),t)\mathrm{d}t\right]$$

$$\text{s a } \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(t),\ \ j=\{1,2,..,l\}.$$

Dada la separabilidad en el tiempo y en los estados de la naturaleza de las funciones de utilidad, este problema puede resolverse en cada instante $t\in[0,T]$ y estado $s\in S$ obteniéndose a partir del Lagrangiano Λ, las siguientes condiciones de primer orden:

$$\Phi_c(\mathbf{c}^*(\lambda),\gamma^*(\lambda)) = 0, \tag{1}$$

$$\Phi_\gamma(\mathbf{c}^*(\lambda),\gamma^*(\lambda),\lambda) = 0,$$

siendo γ los multiplicadores de Lagrange asociados a cada una de las l restricciones del programa de optimización.

Definimos la función exceso de utilidad de la siguiente manera:

$$e(\lambda) = \left\{\mathrm{E}\left(\int_0^T \gamma^*(\lambda)(c_1^*(\lambda)-w_i)\mathrm{d}t\right),...,\mathrm{E}\left(\int_0^T \gamma^*(\lambda),(c_n^*(\lambda)-w_i)\mathrm{d}t\right)\right\}.$$

Según se prueba en Accinelli (1994), aquellos valores de λ para los que la función exceso de utilidad se anulan definen una asignación c de equilibrio y el correspondiente valor de p definido por γ^*.

Propiedades de la función exceso de utilidad

i. Si $\lambda_m \to \lambda \in f_r(\Delta)$, entonces $||e(\lambda_m)|| \to \infty$. Donde $f_r(\Delta) = \{\lambda \in \Delta,$ tales que; $\lambda_j = 0,\ j\in\{1,2,...,l\}\}$.

ii. La función exceso de utilidad satisface la ecuación: $\lambda e(\lambda) = 0$

Demostración de la propiedad indicada en el item[i.]:

La concavidad de u_i permite escribir:

$$\partial u_i(c_i(\lambda^m))[c_i(\lambda^m)-w_i] \leq u_i(c_i(\lambda^m)) - u_i(w_i)$$

En el apéndice A se mostrará que si el plan de consumo $c(\lambda^m)$ es tal que

$$\mathcal{U}(c(\lambda^m)) = \max_{c'\in B}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{U}_i(c_i'(\lambda^m))$$

y si además $\lim_{m\to\infty}\lambda^m = \lambda$ con algún $\lambda_j = 0$, entonces $\lim_{m\to\infty} u_j(c_j(\lambda^m)) = u_j(0)$. Por ser w_j estrictamente positivo en todas sus componentes y las utilidades crecientes se tiene que $u_j(0) < u_j(w_j)$, luego a partir de la definición de función exceso de utilidad y de la desigualdad anterior derivada de la concavidad de las utilidades se concluye que: $e_j(\lambda^m) \to -\infty$.

De acuerdo al item [ii] que es de inmediata constatación, si $e(\lambda)$ tiene iguales a cero todas sus coordenadas excepto una, entonces es el vector nulo. Así para identificar un equilibrio es suficiente hallar un cero de la proyección $\bar{e} = \pi_i.e : \Delta \to R^{n-1}$, donde $\pi_i : R^n \to R^{n-1}$ es la proyección en las $n-1$ coordenadas que no son i.

La propiedad señalada en el item [i] muestra que la composición $\bar{e} = \pi_i.e$ es propia, esto es que la preimagen de conjuntos compactos es a su vez un conjunto compacto en el dominio de la función en cuestión.

2.4 Unicidad global del equilibrio

Para una economía intertemporal es posible tener previsión del desarrollo futuro de la economía solamente si existe un único camino de equilibrio posible, es decir un único plan de consumo, en otras condiciones la imposibilidad de previsión es intrínseca al modelo aún en el caso de previsibilidad absoluta de las dotaciones (véase Accinelli and Puchet (1996)).

Bajo hipótesis adecuadas de diferenciabilidad y acotación en las utilidades, la no existencia de singularidades para la función exceso de utilidad, esto es la regularidad del jacobiano de dicha función para todo valor de λ en el interior del simplex, es condición suficiente para la unicidad del equilibrio. Esto es resultado del Teorema de Inversión Global (Chichilnisky (1998)) aplicado a la función exceso de utilidad.

Teorema 1: Si el Jacobiano de la función exceso de utilidad no se anula, entonces existe un único equilibrio.

Prueba: La composición $\bar{e} = \pi_i.e$ mapea conjuntos abiertos de R^{n-1} en R^{n-1}, luego $\bar{e}(\Delta)$ es abierto, en particular es una variedad. Como además la función exceso de utilidad satisface la condición de deseabilidad (item i. subsección anterior) $\bar{e}$ es un mapa propio. Luego como la imagen de Δ bajo e es contractible porque Δ lo es, la imagen de Δ por $\bar{e}$ lo es también. Ahora podemos aplicar el Teorema de Invertibilidad Global.■

A los efectos de ilustrar la afirmación anterior, analizaremos el jacobiano de la función exceso de utilidad,

$$J_\lambda e(\lambda) = [\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}];\ i = \{1, 2, ..., n\},\ k = \{1, 2, ..., n\},$$

$$\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k} = \mathrm{E} \int_0^T \frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k} \left\{ \partial^2 u_i(c_i(\lambda), t)[c_i(\lambda) - w_i(t)]^{tr} + [\partial u_i(c_i(\lambda), t)]^{tr} \right\} \mathrm{d}t. \quad (2)$$

Donde por la trasposición del vector a está representada por a^{tr}. Indica la escritura del vector como un vector columna. Además $\frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k} = \left(\frac{\partial c_{i1}}{\partial \lambda_k}, ..., \frac{\partial c_{il}}{\partial \lambda_k}\right)$, $\partial^2 u_i(c_i(\lambda), t)$ es la matriz de derivadas segundas de la función $u_i(c, t)$, donde sus entradas son $a_{jk} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial c_{ij} \partial c_{ik}}$.

La diferenciabilidad de c como función de λ se obtiene a partir de las condiciones de primer orden, el hecho de que las funciones de utilidad sean estrictamente cóncavas asegura que $\frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k}$ está bien definido, ver apéndice A. La integrabilidad se mostrará en el apéndice B.

El hecho de que el determinate sea distinto de cero para todo valor en el simplex, es equivalente a la condición de que la dimensión de la imagen sea igual a $n-1$, es decir, que la matriz asociada, defina un isomorfismo de R^{n-1} en R^{n-1} para cualquiera sea el λ elegido, es decir no existen valores singulares para la función exceso de utilidad.

3. Equilibrio general: un modelo intertemporal con activos financieros

Veremos en esta sección como a partir de la existencia de un equilibrio Walrasiano para una economía sin activos financieros, es posible construir un equilibrio para otra en la que si existen tales activos.

En el instante $t=0$ se intercambian activos, cuyos retornos serán percibidos en estados subsecuentes, donde a la vez se realizará el intercambio y consumo de bienes, por parte de los agentes que buscan maximizar sus respectivas funciones de utilidad, restringiéndose a su región presupuestaria, esto es sobre planes de consumo presupuestariamente factibles, lo que será definido más abajo (ver definición 3).

Existen k activos financieros, el conjunto de los cuales será representado por $K=\{l,2,...,k\}$. El retorno de cada uno de ellos por un proceso aleatorio d_j, $j\in K$, donde la variable aleatoria d_{jt} representa los dividendos pagados hasta el tiempo t inclusive, por el j-ésimo activo.

El vector θ_τ en R^k representará un portafolio, disponible a partir del tiempo τ, cuyos dividendos acumulados desde el tiempo τ hasta t serán $\theta_\tau(D_t-D_\tau)$, representándose por $D_t=\{d_{1t},d_{2t},...,d_{kt}\}$ el vector aleatorio de dividendos generados por los correspondientes activos, acumulados desde $t=0$ hasta t, como en Duffie (1996) los dividendos se medirán en unidades de cuenta, $\theta=(\theta_0,\theta_1,...,\theta_n)$ forma un proceso predecible de portafolios, uno para cada agente. El espacio de tales procesos será Θ.

El precio de los activos será representado por un proceso aleatorio $S=S^0,S^1,...,S^k$, y el proceso de beneficios será $G=(S+D)$. Se consideran hipótesis que hagan que el proceso de beneficios asociado a un proceso de intercambio de portafolios θ, el que se representará por la integral estocástica: $\int\theta_t\mathrm{d}G_t$ esté bien definido, por ejemplo que para G martingala, la correspondiente integral sea una martingala. Un portafolio θ se dice *factible* si dado un vector $S^0\in R^k$ de precios para cada activo en $t=0$, esto es antes de que se revele el verdadero estado de la naturaleza, para $t\in(0,T]$, se tiene que: $S^0\theta\leq 0$. (Se supone que en $t=0$ no hay dotaciones iniciales).

Definición 1: Decimos que un portafolio θ y un proceso de consumo c, forman un plan presupuestariamente factible, si para el par $(\theta,c)\in\Theta\times B_+$ para todo $t\in[0,T]$, se tiene que:

$$\theta_t.S_t=\int_0^t\theta_s\mathrm{d}G_s+\int_0^t p_s(w_{is}-c_s)\mathrm{d}s, \tag{3}$$

y tal que $\theta_T=0$ (lo que significa la no existencia de deudas en el instante terminal).

Definición 2: Un plan presupuestariamente factible (θ, c) para el agente i, es optimal para i si no existe otro plan presupuestariamente factible (θ', c')tal que $U_i(c') > U_i(c)$.
Definición 3: Un equilibrio para una economía $\varepsilon = ((\Omega, B, \mu),\ (U_i, w_i),\ D,\ i = (1, ..., n))$ es una colección $((S, p),\ (\theta_1, c_1), ..., (\theta_n, c_n))$ tal que, dados el proceso de precio de los activos S y el proceso de precios a la vista p para los bienes de consumo, el plan $\{\theta_i, c_i\}_{i=l}^n$ presupuestariamente factible es optimal para cada i y además se cumple que: $\sum_{i=1}^n c_i - w_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n \theta_i = 0$.

A continuación analizaremos las condiciones que garantizan la optimalidad y la existencia del equilibrio en un mercado con activos financieros y bienes de consumo.

3.1 Existencia y optimalidad del equilibrio para mercados de activos y bienes

En las condiciones en que cada individuo maximiza una utilidad intertemporal a partir de $t = 0$, para que la definición de equilibrio tenga sentido no debe de existir ningún plan de consumo, financiable con una estrategia admisible, tal que para un suceso $a_t \in \mathcal{B}_t,\ 0 < t < T$, de medida no nula, sea preferible al plan de equilibrio para todo estado en a_t. No obstante, como es sabido los consumos correspondientes a los equilibrios en mercados con activos que se negocian en diferentes períodos no son Pareto optimales, a menos que se emulen condiciones equivalentes a las existentes en las economías regulares, esto es aquellas en la que es posible transferir riqueza entre cualquier estado de la naturaleza.

La hipótesis de mercados completos se sustituye aquí por la existencia de estrategias que permiten financiar el plan de consumo (ver definición 1). Los agentes pueden intercambiar activos en cada momento, formando el portafolio óptimo que les permita financiar el plan de consumo ya decidido (ver Huang and Litzenberger). En estas condiciones no existe otro plan de consumo financiable, mejor que el previamente elegido como óptimo en $t = 0$. Podemos entonces enunciar el siguiente teorema.
Teorema 2: Sea $w = \sum_{i=1}^n w_i$, supongamos que para cada agente su utilidad es quasi-cóncava y creciente en el intervalo $[0, w]$ en las condiciones de Inada, entonces no existen incentivos para que algún agente se desvíe de la trayectoria de equilibrio.
Prueba: Razonemos por el absurdo, suponga que existe un plan de consumo c' y la correspondiente estrategia financiadora θ', tal que para algún agente:

$$\int_{a_t} \left[\int_t^T u_i(c'_t, t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\mu(s) > \int_{a_t} \left[\int_t^T u_i(c_t, t) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\mu(s),$$

$$\theta'_t.S_t = \int_0^t \theta'_s \mathrm{d}G_s + \int_0^t p_s(w_{is} - c_s) \mathrm{d}s,$$

y tal que $\theta'(T) = 0$, para todo $s \in a_t$,

Defina entonces la siguiente estrategia de activos y el siguiente plan de consumo:

$$\bar{\theta}(s) = \begin{cases} \theta_i(s), & \text{si } s \leq t \\ \theta_i(s), & \text{si } s > t;\ a_s \nsubseteq a_t \\ \theta'(s), & \text{si } s \geq t;\ a_s \subseteq a_t \end{cases}$$

$$\bar{c}(s) = \begin{cases} c_i(s), & \text{si } s \leq t \\ c_i(s), & \text{si } s > t;\ a_s \not\subseteq a_t \\ c'(s), & \text{si } s \geq t;\ a_s \subseteq a_t \end{cases}$$

Para este plan de consumo se cumple que:

$$\mathrm{E}\left[\int_t^T u_i(c_t', t)\mathrm{d}t|\mathcal{B}_t\right] \geq \mathrm{E}\left[\int_t^T u_i(c_t, t)\mathrm{d}t|\mathcal{B}_t\right].$$

Siendo estricta la desigualdad para todo evento en a_t.

Tomando esperanza en ambos términos de la desigualdad anterior obtenemos una contradicción con la definición de equilibrio.■

Lo que la demostración anterior prueba es que ningún agente tiene incentivos para desviarse de la senda de equilibrio elegida en $t = 0$.

El paso siguiente consiste en encontrar un portafolio θ y un proceso de precios S para los activos constitutivos tal que (p, c, S, θ) conforme un equilibrio para la economía E con bienes contingentes y activos.

Antes de formular el teorema de existencia, se requieren algunas definiciones:

Definición 4: Decimos que un proceso $M = (M^1, ..., M^k)$ es generador de martingalas si M^j es para cada $t \in [0, T]$ una variable aleatoria real en $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, tal que para cada martingala X, existe $\phi \in L_1[M]$[1] tal que casi seguramente para todo $t \in [0, T]$, $X_t = X_0 + \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}M_s$.

Definición 5: Decimos que un proceso G es un generador dinámico, si para toda martingala M existe una probabilidad η en $(\Omega, \mathcal{B})$, uniformemente equivalente a μ, tal que $M_t = E^\eta[D_t/\mathcal{B}_t], t \in [0, T]$.

Nota 1: El movimiento Browniano es un generador dinámico.

Nota 2: La medida η es equivalente a μ si las derivadas de Radon-Nikodin $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\mu$ y $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\eta$ están sustancialmente acotadas.

Nota 3: La definición de $L_1[M]$ no se altera por la sustitución de medidas equivalentes.

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3: Bajo las hipótesis del teorema anterior, para una economía con $k+1$ procesos de dividendos, $D = (D_0, D_1, ..., D_k)$ donde D_0 corresponde al dividendo generado por el bono cupón pagable en T, si el proceso de beneficios G satisface la condición de generador dinámico, entonces en la economía E existe para cada par (c, p) Equilibrio Walrasiano, un portafolio θ y su correspondiente proceso S de precios tal que (θ, c, S, p) es un equilibrio para la economía E con activos y bienes contingentes.

Prueba: Por ser (c, p) un Equilibrio Walrasiano, se tiene que para toda medida equivalente a μ en $(\Omega, \mathcal{B})$, $\sum_{i=1}^n c_i - w_i = 0$ c.s. Sea:

$$x_i(t) = \mathrm{E}^\eta\left[\int_0^T p(s)(c(s) - w_i(s))\mathrm{d}s/\mathcal{B}_t\right] \forall i = 1, 2, ..., n-1.$$

[1] $L_1[M] = \{\phi : E(\int_0^t \mid \phi^j \mid dM^j) < \infty, \forall j \in (1, 2, \cdots, k)\}$, siendo ϕ un proceso predecible.

Por la condición de ser G generador de martingalas, existe $\phi = (\phi^0, ..., \phi^k)$ tal que:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}G_s,$$

definimos θ_0 como:

$$\theta_i^0(t) = x_i(t) - \int_0^t p(s)(c_i(s) - w_i(s))\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^k \theta_j(t)(S^j(t) + \Delta^j(t)), \quad t \in [0, T]$$

$i = 1, 2, \cdots, n-1$.

Consideremos ahora el portafolio $\theta_i = \phi_i \; \forall i \in 1, 2, \cdots, n-1$ y $\theta_n = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i$. En estas condiciones, tenemos que θ_i financia el consumo c_i para todo consumidor, con el costo inicial $x_i(0) = \mathrm{E}^\eta\big(\int_0^T p(s)(c(s) - w_i(s))\mathrm{d}s\big) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n.$ ■

4 Existencia y unicidad del equilibrio en un modelo con activos y un único bien de consumo

Como hasta ahora, se supone un modelo de economía con n agentes, pero de aquí en adelante en nuestro modelo existirá un único bien disponible en cada instante del tiempo y en cada estado, y k activos diferentes, cuyos dividendos representaremos por el proceso estocástico k-dimensional $D = \{D_1, \cdots, D_k\}$.

El modelo presentado puede considerarse entonces, como un caso particular de un modelo de mercados incompletos, en el que se considera la existencia de un único bien consumible en cada instante y en cada estado de la naturaleza, en este caso particular puede probarse que se cumple el primer teorema del bienestar, lo que es generalmente falso en el caso general de mercados incompletos.

Para funciones de utilidad definidas como en la sección 2, en Mas-Colell y Monteiro (1990) se define un equilibrio para la economía como un conjunto $(q, \bar\theta, p, \bar x)$ tal que:

a) $q \in R^k, q \neq 0$ es un vector de precios, uno para cada activo, en $t = 0$.

b) $\bar\theta = (\bar\theta_1, \cdots, \bar\theta_n) \in R^{kn}$ es un vector de portafolios, tal que $\sum_{i=1}^n \bar\theta_i = 0$, y $_q\bar\theta_i \leq 0$. $\forall_i = 1, 2, \cdots, n$.

c) Como anteriormente p es un proceso de precios a la vista.

d) $\bar x = (\bar x_1, \cdots, \bar x_n)$ es un plan de consumo donde $\sum_{i=1}^n \bar x_i = \sum_{i=1}^n \bar\omega_i$.

e) $(\bar x_i \bar\theta_i)$ resuelve:

$$\max_x \mathrm{E}\left[\int_0^T u_i(x_i(t), t)\mathrm{d}t\right] \tag{4}$$

$$\text{s.a} \int_0^\tau p(t)x_i(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^t \left[p(t)(\omega_i(t) + \sum_{i=1}^k \theta_{ij}D_j(t))\right]\mathrm{d}t, \;\; \forall_\tau \in [0, T]\,\text{c.s.}$$

s y $q\bar\theta_i \leq 0$.

En la medida en que hay un único bien de consumo podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que: $p(t) = 1$, $\forall_s \in \Omega$. Entonces el problema de decisión anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\max_{\theta} \mathcal{U}_i(\theta) = \mathrm{E}\left[\int_0^T u_i\left(t, \sum_{j=1}^{K} w_i(t) + \theta_{ij} D_j(t)\right)\mathrm{d}t\right] \tag{5}$$

$$\text{s.a} \int_0^T \left[w_i(t) + \sum_{j=1}^{K} \theta_{ij} D_j(t)\right] \mathrm{d}t \geq 0 \text{ c. s. y } q\theta_i \leq 0,$$

entonces podemos dar la siguiente definición de equilibrio:

Definición 6: Un equilibrio para una economía con un único bien disponible en cada estado de la naturaleza e instante del tiempo es un par $(q, \theta) \in R^k \times R^{nk}$ tal que:

1) $\bar{\theta}^i$ resuelve el problema de elección del portafolio.
2) $\bar{\theta}$ es factible, esto es: $\sum_{i=1}^{n} \bar{\theta}^i = 0$.
3) If $\theta \succ \bar{\theta}$ equivalentemente $\mathcal{U}_i(\bar{\theta}) > \mathcal{U}_i(\theta)$, entonces θ no es factible.

Para economías con un único bien de consumo, la siguiente proposición es inmediata:

Proposición 1: Toda asignación de activos de equilibrio es Pareto optimal.

Prueba: Supongamos que $\bar{\theta} \in R^{nk}$ es una asignación de equilibrio, y sea θ asignación factible tal que: $\theta \succ \bar{\theta}$, es decir que:

$$\left[\int_0^T u_i\left(t, \sum_{j=1}^{K} w_i(t) + \theta_{ij} D_j(t)\right)\mathrm{d}t\right] \geq \left[\int_0^T u_i\left(t, \sum_{j=1}^{K} w_i(t) + \bar{\theta}_{ij} D_j(t)\right)\mathrm{d}t\right],$$

en un subconjunto de Ω de medida positiva, con desigualdad estricta para al menos un agente h, y además se satisface la identidad $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0$. Se sigue que la asignación θ es para el agente h estrictamente mas cara que la correspondiente a $\bar{\theta}$, es decir que $q\theta_h > 0 \geq q\bar{\theta}_h$. Entonces para algún k debe verificarse que $q\theta_k < q\bar{\theta}_k$. Luego por la estricta convexidad de las preferencias se sigue que: $\frac{1}{2}\theta_k + \frac{1}{2}\bar{\theta}_k \succ_k \theta_k$. Tendremos entonces que: $q\left[\frac{1}{2}\theta_k + \frac{1}{2}\bar{\theta}_k\right] > q\theta_k$, es decir que $q\theta_k > q\bar{\theta}_k$, lo que contradice la anterior desigualdad. ∎

Teniendo en cuenta que para cada óptimo de Pareto, es posible encontrar un conjunto de pesos sociales, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ que es un elemento del simplex de dimensión $n-1$ y que hacen que para tales pesos el referido óptimo maximice una utilidad ponderada u_λ, es posible obtener precios de equilibrio, a partir de aquellos elementos del simplex (pesos sociales) que hacen que se anule la función exceso de utilidad (Accinelli (1996)).

Para este caso es fácil ver que el precio en el instante cero para el activo j está dado por:

$$S_j = \mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{\partial u_\lambda(w(t))}{\partial x_i} D_j(t)\mathrm{d}t\right],$$

donde $u_\lambda(w) = \max\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(c_i)$, con la restricción $\sum_{i=1}^n c_i \leq \sum_{i=1}^n w_i$, evaluada en aquellas $\lambda = \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ para las que la función de exceso de utilidad e, se anula, siendo $c = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ un proceso de consumo contingente con los estados de la naturaleza posibles.

Consideremos ahora una economía de con un continuo de períodos, de intercambio puro con un único bien de consumo en cada período. Cada agente elige su consumo para hoy $c_i(0)$ y un plan contingente a los estados de la naturaleza $c_{is}(t), t \in [0, T]$, para los días siguientes. Suponemos utilidades crecientes para el consumo, diferenciables, estrictamente quasi-cóncavas y en la condición de Inada.

De acuerdo al método de Negishi, teniendo en cuenta que para este tipo de economía vale el primer teorema del bienestar, es posible obtener precios y asignaciones de equilibrio a partir de la función exceso de utilidad. El método de Negishi para este problema requiere comenzar por maximizar

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T u_\lambda(w_0, w_s(t))\mathrm{d}t\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{E}\left[\int_0^T u_i(c_{i0}, c_{is}(t))\mathrm{d}t\right]$$

$$\text{s.a} \sum_{i=1}^n c_{is}(t) = w_s(t), \forall s \in S, \; t \in (0, T],$$

$$\sum_{i=1}^n c_{i0}(t) = w(0).$$

Supongamos ahora que la economía tiene K activos, siendo d_j los dividendos que pagará el activo j-ésimo en el período 1, siendo contingente a los estados de la naturaleza. El problema de elección óptima es para este caso equivalente a:

$$\max_{c_{i0}\in R, \theta \in R^{k+1}} \mathrm{E}\left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(c_{i0}, w_i(t) + \theta_i D(t))\mathrm{d}t\right]$$

$$\text{s.a.} \quad \theta_q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n c_{is}(t) = \sum_{i=1}^n (w_{is}(t) + \theta_i D_s(t)), \forall s \in S, \quad t \in [0, T],$$

$$\sum_{i=1}^n c_{i0}(t) = w(0).$$

El supuesto de utilidades separables en el tiempo y en los estados de la naturaleza permite escribir las siguientes condiciones de primer orden:

$$\lambda_i \mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{\partial u_i(c_{i0}(\lambda), w_{is}(t) + \theta_i(\lambda) D_{js}(t))}{\partial c_{i0}}\mathrm{d}t\right] = \gamma_0$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(c_{i0}(\lambda), w_{is} + \theta_i(\lambda) D_{js}(t))}{\partial c_{is}} D_{js} = \gamma_s(t), \forall_i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Siendo γ_0 y γ_s los respectivos multiplicadores de Lagrange para el programa original.

A partir de estas igualdades y evaluando solamente en aquellos elementos $\bar{\lambda}$ en el simplex positivo de dimensión $n-1$, Δ_+^{n-1}, que anulan a la función exceso de utilidad $e : \Delta_+^{n-1} \to R^{n-1}$ (Accinelli (1996)) se tiene que el precio de un activo contingente al estado de la naturaleza $s \in S$ será:

$$S_j = \mathrm{E}\left[\frac{\int_0^T \frac{\partial u_i(c_{i0}(\bar{\lambda}), w_{is}+\theta_i(\bar{\lambda}), D_{js}(t))}{\partial c_{is}} D_{js}\mathrm{d}t}{\mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{\partial u_i(c_{i0}(\bar{\lambda}), w_{is}(t)+\theta_i(\bar{\lambda}), D_{js}(t))}{\partial c_{i0}}\mathrm{d}t\right]}\right], \tag{7}$$

donde u_λ es la función de utilidad ponderada por los pesos $\bar{\lambda} \in \Delta_+^{n-1}$, el simplex de dimensión $n-1$, tales que $e(\bar{\lambda}) = 0$. Equivalentemente:

$$S_j = \mathrm{E}\left[\frac{\int_0^T \frac{\partial u_\lambda(w_0, w_s(t))}{\partial c_s}\mathrm{d}t}{\mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{\partial u_\lambda(w_0, w_s(t))}{\partial c_{i0}} D_{js}(t)\mathrm{d}t\right]}\right], \tag{8}$$

a partir de las condiciones de primer orden obtenemos que el resultado es independiente del c_i elegido. Para el bien de consumo en $t = 0$ obtenemos:

$$S_0 = \mathrm{E}\left[\frac{\int_0^T \frac{\partial u_\lambda(w_0, w_s(t))}{\partial c_{is}}\mathrm{d}t}{\mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{\partial u_\lambda(w_0, w_s(t))}{\partial c_{is}}\mathrm{d}t\right]}\right]. \tag{9}$$

Como S_0 es el precio unitario del bono cupón, tendremos para la tasa de interés r_f sin riesgo:

$$r_f = \frac{1}{S_0 - 1}.$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{1}{1+r_f} = \mathrm{E}\left[\frac{\int_0^T \frac{\partial u_\lambda(w_0, w_s(t))}{\partial c_s}\mathrm{d}t}{\mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{\partial u_\lambda(w_0, w_s(t))}{\partial c_s}\mathrm{d}t\right]}\right]$$

Con la notación:

$$\mathcal{U}'_{\lambda,0}(w_0, w_s) = \mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{\partial u_i(c_{i0}(\lambda), w_{is}(t) + \theta_i(\lambda), D_{js}(t))}{\partial c_{i0}}\mathrm{d}t\right],$$

$$\mathcal{U}'_{\lambda,1}(w_0, w_s) = \int_0^T \frac{\partial u_i(c_{i0}(\lambda), w_{is} + \theta_i(\lambda), D_{js}(t))}{\partial c_{is}} D_{js}\mathrm{d}t$$

Con esta notación podemos escribir:

$$S_j = \mathrm{E}\left[\frac{\mathcal{U}'_{\lambda,1}(w_0, w_s)}{\mathcal{U}'_{\lambda,0}(w_0, w_s)} D_j\right], \tag{10}$$

$$S_0 = \mathrm{E}\left[\frac{\mathcal{U}'_{\lambda,1}(w_0, w_s)}{\mathcal{U}'_{\lambda,0}(w_0, w_s)}\right]. \tag{11}$$

Dividiendo a ambos miembros de (7) por S_j y a partir de la definición de covarianza obtenemos:

$$\mathrm{E}[r_j - r_f] = -\left(\mathrm{E}\left[\frac{\mathcal{U}'_{\lambda,1}(w_0, w_s)}{\mathcal{U}'_{\lambda,0}(w_0, w_s)}\right]\right)^{-1} \mathrm{Cov}\left(r_j \frac{\mathcal{U}'_{\lambda,1}(w_0, w_s)}{\mathcal{U}'_{\lambda,0}(w_0, w_s)}\right), \tag{12}$$

donde $r_j = \frac{D_j}{S_j} - 1$, es la tasa de retorno del activo j.

Una sustitución más nos lleva a:

$$\mathrm{E}[r_j - r_f] = -(1 + r_f)\mathrm{Cov}\left(r_j \frac{\mathcal{U}'_{\lambda,1}(w_0, w_s)}{\mathcal{U}'_{\lambda,0}(w_0, w_s)}\right).$$

Obsérvese que siendo la utilidad estrictamente cóncava, el premio por riesgo debe aumentar con los estados de bonanza, es decir con aquellos estados donde la riqueza agregada es mayor. Un consumidor adverso al riesgo necesitará un premio mayor por riesgo, si el retorno esperado del activo es mayor en los momentos de riqueza agregada mayor. Así un activo que ofrece un mayor retorno en los estados pobres que en los ricos, será más valioso que otro que ofrezca más en estados ricos y menos en estados pobres. Esto se puede decir también señalando que una unidad de consumo adicional es más valiosa cuanto menor sea la riqueza agregada.

Es posible obtener un proceso de precios de equilibrio instantáneos S_j, con $S_{j0} = q$, para cada activo $j = (1, 2, \cdots, K)$.

$$S_{jt} = \frac{1}{u_{\lambda c}(w, t)} \mathrm{E}\left[\int_t^T u_{\lambda c}(w_s, s) \mathrm{d}D_{js} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0, T). \tag{13}$$

En función de lo dicho en la sección (2) sólo resta probar que el portafolio θ que financia el consumo de equilibrio es optimal para el proceso de la ecuación (13). Para este proceso de precios, es posible repetir el razonamiento anterior y obtener un conjunto de igualdades y relaciones análogas para cada instante $t \in [0, T]$.

Notemos que las condiciones suficientes para la unicidad del equilibrio contingente en cada estado de la naturaleza, se desprenden de las generales válidas para la unicidad de los ceros de la función exceso de utilidad (Accinelli (1996)).

5. Dinámica del equilibrio

En esta sección caracterizaremos el comportamiento de las trayectorias de equilibrio para una economía en el que se supone consumidores maximizando una función de utilidad intertemporal, con las condiciones generales del modelo. La existencia de multiplicidad de equilibrios, conlleva la posibilidad de diferentes procesos evolutivos para economías inicialmente iguales en recursos y preferencias.

La dinámica no debe entenderse como la trayectoria gobernada por una ecuación diferencial, sino como una función o funciones determinadas en el instante inicial que indican los precios y las distribuciones posibles de equilibrio para la economía en el futuro, precios y planes de consumo contingentes a los estados de la naturaleza en cada instante del tiempo.

Como ya fue dicho en la sección (2.3) es posible asociar de manera única a cada elemento del simplex (pesos sociales) que anulen la función exceso de utilidad de una economía dada (es decir fijadas las utilidades y las dotaciones iniciales), un único par conformado por un sistema de precios y una asignación de consumo contingente de equilibrio. La no unicidad genérica de los ceros de la función exceso de utilidad es el sustento de la multiplicidad posible de las trayectorias de equilibrio.

5.1 Caso con unicidad de equilibrio

La existencia de un único cero de la función exceso de utilidad para una economía prefijada, implica la existencia de una única trayectoria posible de equilibrio, es decir de un único sistema de precios y asignación de equilibrio. Esto deja a la economía absolutamente predeterminada, de esta manera es posible predecir el futuro en forma perfecta. Las condiciones indicadas en el Teorema de Chichilniski son suficientes para esta situación, es decir, la no existencia de singularidades en la función exceso de utilidad.

La posible aparición de multiplicidades en los ceros de la función exceso de utilidad hace perder esta perspectiva tan rígida, pero paradojicamente pone a la economía en la situación opuesta, no permitiendo ninguna previsibilidad del comportamiento futuro, a partir del conocimiento de las dotaciones iniciales y las funciones de utilidad.

5.2 Caso con multiplicidad de equilibrios

Fijadas las funciones de utilidad, diremos que una economía es singular si para las dotaciones iniciales dadas, el cero de la función exceso de utilidad es un valor singular, y diremos que la economía es regular en caso contrario, respectivamente según el rango del jacobiano de la función exceso de utilidad sea completo o no, al modificarse las dotaciones iniciales una economía puede cambiar de categorización, pasando de singular a regular o viceversa.

La multiplicidad de equilibrios supone la existencia de dotaciones iniciales singulares, es decir de dotaciones iniciales que hacen del cero un valor singular de la función exceso de utilidad. De otra manera no habría multiplicidad, pues siempre es posible la existencia de dotaciones iniciales que para utilidades dadas tengan asociadas un único equilibrio, bastaría para esto tomar como iniciales, dotaciones que sean un óptimo de Pareto, la cantidad de ceros solo se modifica en un entorno de una economía singular.

Una vez que sea posible encontrar economías con múltiples ceros para su función exceso de utilidad, es posible encontrar diferentes pares, formados por diferentes precios y asignaciones de equilibrio. Entendiendo cada sistema de precios como un proceso estocástico en $[0, T]$, y una asignación, como un plan contingente a los estados de la naturaleza para el mismo periodo, nos encontramos entonces con la existencia de diferentes trayectorias de precio y consumo de equilibrio. De esta manera no existe un único comportamiento futuro posible para economías iguales en su comienzo en bienes y preferencias. A la vez que la teoría no dispone de instrumentos para predecir desde el instante inicial, la trayectoria de equilibrio por la que evolucionará el sistema, lo que introduce cierta indeterminación original en el comportamiento del modelo, indeterminación estructural, no vinculada a la imposibilidad de medidas perfectas o conocimiento futuro perfecto.

Es posible pensar que a partir de una determinada transferencia de recursos hecha en un momento dado, por ejemplo una autoridad central, el sistema que evolucionaba de acuerdo a un determinado proceso, pase a uno diferente, en el que las utilidades se seguirán maximizando en una región presupuestaria definida ahora a partir de la transferencia mencionada. Ciertamente esto supondrá cambios estructurales importantes, particularmente en la influencia social de los agentes económicos definida a partir de sus pesos sociales.

El concepto de trayectoria de equilibrio económico tiene diferencias importantes con equilibrios gobernados por ecuaciones diferenciales, no solamente porque no aparece claramente la posibilidad de expresar las leyes que lo determinan, mas que en algunos casos particulares dentro de los que tienen unicidad de equilibrio, sino además porque condiciones iniciales iguales no determinan procesos futuros iguales.

6. El Modelo CAPM

A continuación mostraremos como es posible obtener para economías intertemporales y con incertidumbre en los estados de la naturaleza, las formas clásicas del modelo llamado CAPM. El Modelo CAPM, requiere, en su forma clásica, activos normalmente distribuídos, o utilidades cuadráticas. Veremos que las fórmulas propias del CAPM, pueden obtenerse prescindiendo de los supuestos en las utilidades o en la distribución de los activos, pero necesitamos el supuesto de la existencia de un portafolio generador.

1) Adversión a la varianza: Para dos procesos de consumo c y c' con $\mathrm{E}(c) = \mathrm{E}(c')$ cada agente de la economía preferirá aquel con menor varianza, esto es $U_i(c') \geq U_i(c)$, cada vez que $\mathrm{var}(c) \geq \mathrm{var}(c')$. Obsérvese que si $\{D_j\}, j = 1, 2, \cdots, K$ tienen distribución conjunta normal, entonces la adversión a la varianza es implicado por utilidades cóncavas.
2) Equilibrio: Para la economía $\{U_i, w_i, D_j; i = (1, \cdots, n), j = (1, \cdots, K)\}$ existe un proceso $c = (c_l, c_2, \cdots, c_n)$ de equilibrio autofinanciable, con $p_s = 1$; $c.s.$ por un conjunto $\{\theta, q\}$ de portafolios y precios en $t = 0$, tal que $\{p, c, q, \theta\}$ es un equilibrio de bienes y activos para la economía.
3) No arbitraje: La no existencia de arbitraje, supone la imposibilidad de obtener beneficios sin inversión. Esto es si $\theta : \sum_{j=1}^{K} \theta_j D_j > 0$ en algún subconjunto de S de probabilidad positiva, entonces $q\theta > 0$ y si $q\theta = 0$ entonces $\sum_{j=1}^{K} \theta_j D_j = 0$ $c.s.$
4) Portafolio Generador: Esto es el proceso de beneficios D, asociado a los dividendos pagados por los activos es un generador dinámico (definición 5).

Teorema 4 CAMP, forma precios: Si se satisfacen 1), 2) y 3) para un equilibrio $\{q, \theta\}$ existen constantes h y H tales que:

$$q_j = h\mathrm{cov}(e, d_j) + H\mathrm{E}(d_j); \quad j \in \{1, 2, \cdots, K\}, \tag{14}$$

donde $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$, siendo $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ las dotaciones iniciales de cada agente. $e_i(t, .)$ es para cada $t \in [0, T]$ una variable aleatoria sobre el conjunto de los estados de la naturaleza y $d_j = \int_0^T \theta_j D_{js}(t)\mathrm{d}t$; $\forall s \in S$, una variable aleatoria que representa los dividendos generados por el activo j hasta el final de la economía, siendo D_{js} el retorno del activo j en el estado s.

Antes de la prueba veremos un corolario, para esto necesitamos hacer las siguientes definiciones:

5) Sea e_i una martingala para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Notaremos con $R_\theta = \frac{\sum_{j=1}^{K} \theta_j d_j}{q\theta}$ al retorno del portafolio θ.

Definición 7 Portafolio de mercado: Por la condición de generador del proceso de dividendos (condición 4), existe un portafolio $M = (M_1, M_2, \cdots, M_K)$ tal que $e = \sum_{j=1}^{K} M_j d_j = \sum_{i=1}^{n} C_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} C_i$ es el equilibrio agregado.

6) Asuma que $qM \neq 0$ y que $\mathrm{var}(R_M) \neq 0$, sea $\beta_\theta = \frac{\mathrm{cov}(R_\theta, R_M)}{\mathrm{var}(R_M)}$.

Corolario 1 CAPM, forma retornos: Bajo las condiciones 2) a 6) existe al menos un portafolio ϕ con un valor de mercado no cero y $\beta_\phi = 0$. Para ϕ fijo y para todo θ se tiene:

$$\mathrm{E}(R_\theta) - \mathrm{E}(R_\phi) = \beta_\theta[\mathrm{E}(R_M) - \mathrm{E}(R_\phi)].$$

Si existe un portafolio sin riesgo se puede tomar por ϕ.

Prueba del Corolario. A partir del supuesto de no arbitraje, item 3) es posible concluir que el espacio de portafolios tiene dimensión al menos dos. Considerando cov como un producto interno en el espacio de los portafolios factibles, puede concluirse la existencia de un portafolio ϕ tal que $\beta_\phi = 0$, basta para ver esto considerar un vector R_ϕ ortogonal a R_M.

A partir de la ecuación 14 y de los ítemes 4) y 6) obtenemos la siguiente igualdad:

$$q\theta = h\mathrm{cov}\Big(\sum_{j=1}^{K} M_j d_j, \sum_{j=1}^{K} \theta_j d_j\Big) + H\mathrm{E}\Big(\sum_{j=1}^{K} \theta_j d_j\Big).$$

Analogamente para el portafolio ϕ; obtenemos:

$$q\phi = H\mathrm{E}\Big(\sum_{j=1}^{k} \phi_j d_j\Big),$$

de donde sigue que:

$$H = \frac{1}{\mathrm{E}[R_\phi]}.$$

Finalmente para el portafolio M se tiene:

$$qM = h\mathrm{var}\Big(\sum_{j=1}^{K} M_j d_j\Big) + \frac{1}{\mathrm{E}[R_\phi]}\mathrm{E}\Big(\sum_{j=1}^{K} M_j d_j\Big).$$

Sencillas operaciones algebraicas conducen a

$$h = \frac{1}{\mathrm{var}(R_M)}\left[\frac{\mathrm{E}[R_\phi] - \mathrm{E}[R_M]}{Mq\mathrm{E}[R_\phi]}\right].$$

La ecuación (14) lleva también a la siguiente igualdad

$$1 = h\mathrm{cov}\Big(\sum_{j=1}^{K} M_j d_j, R_\theta\Big) + H\mathrm{E}(R_\theta).$$

Sustituyendo en forma adecuada obtenemos:

$$\mathrm{E}(R_\theta) - \mathrm{E}(R_\phi) = \frac{\mathrm{cov}(R_M, R_\theta)}{\mathrm{var}(R_M)}[\mathrm{E}(R_M) - \mathrm{E}(R_\phi)]. \blacksquare$$

A continuación probaremos el teorema. Se hará siguiendo de cerca a Chamberlain (1988).

Prueba del Teorema (CAPM en forma de precios): Sea $\mathcal{Z} = \mathrm{gen}\{d_j; j = (1, 2, \cdots, K)\}$ el espacio generado por el retorno de los activos de la economía. Consideremos ahora el producto interno $(z, z') \to \mathrm{cov}(z.z')$. Entonces para todo funcional lineal $\Pi\mathcal{Z} \to \Re$ continuo existe $\pi \in \mathcal{Z}^*$ un elemento del espacio dual, tal que $\Pi(z) = \mathrm{cov}(\pi, z); \forall_z \in \mathcal{Z}^*$.

Particularmente para $z = \sum_{j=1}^{K} \theta_j d_j$ y para el funcional lineal $\bar{\Pi}(z) = \sum_{j=1}^{K} q_j\theta_j$, existe $\bar{\pi}$ tal que $\bar{\Pi}(z) = \mathrm{cov}(\bar{\pi}, \sum_{j=1}^{K} q_j\theta_j)$. Por la linealidad de la covarianza obtenemos que para todo portafolio θ:

$$\sum_{j=1}^{K} q_j\theta_j = \bar{\Pi}(z) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j[\mathrm{E}(\bar{\pi} d_j) - \mathrm{E}(\bar{\pi})\mathrm{E}(d_j)],$$

de donde $q_j = \mathrm{E}(\bar{\pi} d_j) - \mathrm{E}(\bar{\pi})\mathrm{E}(d_j)$ a partir del hecho de ser d_j, $j = 1, 2, \cdots, K$. Es decir, $q_j = \mathrm{cov}(\bar{\pi}, d_j)$.

Sea η el elemento que representa a E, esto es para todo $z \in \mathcal{Z}$ se tiene que $\mathrm{E}(z) = \mathrm{cov}(\eta, z)$. Sea $\bar{e}$ la proyección ortogonal de e en el subespacio generado por $\{\bar{\pi}, \eta\}$ puede verse que existen constantes h y H, tales que: $\bar{\pi} = h\bar{e} + H\eta$. Sustituyendo en la expresión anteriormente obtenida para q_j, se obtiene $q_j = \mathrm{cov}((h\bar{e} + H\eta), d_j) = h\mathrm{cov}(\bar{e}, d_j) + H\mathrm{cov}(\eta, d_j)$. Como $\mathrm{cov}(\eta, d_j) = \mathrm{E}(d_j)$ y como puede verificarse $\mathrm{cov}(\bar{e}, d_j) = \mathrm{cov}(e, d_j)$.$\blacksquare$

Teorema 5: Para cada agente, existen dos portafolios ϕ^A y ϕ^B que financian su consumo.

Prueba: A partir del supuesto 4) sabemos que existe un portafolio θ_i que financia el consumo c_i del agente i pues, siendo $e_i + \sum_{j=1}^{K} d_j\theta_{ji} = c_i$, la proyección ortogonal $\bar{c_i}$ pertenece al espacio generado por $\bar{\pi}$ y $\bar{\eta}$ del teorema anterior. Además como $\mathrm{var}(c_i) = \mathrm{var}(\bar{c_i}) + \mathrm{var}(c_i - \bar{c_i}) \geq \mathrm{var}(\bar{c_i})$ con $\mathrm{E}(\bar{c_i}) = \mathrm{E}(c_i)$ obtenemos por el item 1) que $U_i(\bar{c_i}) \geq U_i(c_i)$.

Luego el consumo pertenece a gen$\{\pi, \eta\}$ (espacio generado por los vectores π y η). Por el item 4) tenemos que existen portafolios ϕ^A y ϕ^B tales que:

$$\sum_{j=1}^{K} \phi^A d_j = \eta$$

$$\sum_{j=1}^{K} \phi^B d_j = \pi$$

6.1 Utilidades cuadráticas

En el caso particular de utilidades cuadráticas, puede obtenerse los resultados propios del modelo CAPM, pues para estas utilidades se tiene adversión a la varianza, siendo suficiente las dos primeras derivadas para caracterizar las preferencias, análogamente a lo que sucede si se suponen todos los activos normalmente distribuidos y se supone que los agentes buscan minimizar el riesgo. En este caso podemos prescindir de la condición de la existencia de un portafolio generador. Es fácil ver que en el caso de utilidades cuadráticas, la utilidad ponderada, u_λ es también cuadrática .

Según 10, el precio de los activos en el equilibrio estará representado por:

$$q_j = H\mathrm{E}[u'_\lambda(e)d_j] = \mathrm{cov}[u'_\lambda(e), d_j],$$

de donde se sigue que

$$q_j = \mathrm{E}[u'_\lambda(e)d_j] - \mathrm{E}[u'_\lambda(e)]\mathrm{E}[d_j],$$

de esta manera

$$q_j = h_1\mathrm{cov}[u'_\lambda(e), d_j] + k_2\mathrm{E}(d_j). \tag{15}$$

Finalmente obtenemos:

$$q_j = H_1\mathrm{cov}\left[\int_t^T (A + Bw(s))\mathrm{d}D_s, d_j\right] + H_2\mathrm{E}(d_j). \blacksquare \tag{16}$$

6.2 Pérdida de la eficiencia en un modelo CAPM

Como fue visto anteriormente la maximización de funciones cuadráticas llevan a la llamada fórmula CAPM. La misma puede obtenerse también como resultado de un proceso de minimizar la varianza de un portafolio sujeto a un retorno esperado fijo de antemano. Un portafolio de equilibrio es eficiente en el sentido de minimizar la varianza para el rendimiento esperado dado, es decir pertenece a la frontera de eficiencia.

Es fácil ver que una vez que se imponen condiciones adicionales a los posibles activos de una cartera, como por ejemplo no poder colocar determinado tipo de ellos o mantener una cantidad predeterminada de otros hace que se pierda la eficiencia, implicando esto que para un mismo retorno esperado el riesgo asumido por el poseedor de la cartera sea mayor en presencia de restricciones adicionales. En esta subsección presentaremos el caso de las AFAPS uruguayas y mostraremos que su cartera está lejos de la eficiencia.

Para la realización del siguiente ejercicio se parte del modelo clásico con el cual se obtiene el portafolio de frontera. En nuestro caso seguimos a Huang y Litzenberger.

Definición 8: Un portafolio se llama de frontera si es de mínima varianza entre aquellos que tienen el mismo retorno esperado.

Esto es, un portafolio θ es de frontera si y sólo si w_θ, esto es el vector de K activos que conforman el portafolio, resuelve el programa cuadrático:

$$\min_w \frac{1}{2} w_T V_w \tag{17}$$

$$s.a\ : w_T \mathbf{e} = \mathrm{E}[r_\theta]$$

$$w_T \mathbf{1} = 1$$

donde $\mathbf{e}$ denota el K vector de retornos esperados en los K activos, $\mathrm{E}[r_\theta]$ denota la tasa esperada de retorno en el portafolio y $\mathbf{1}$ es un K vector de unos.

Nótese que son permitidas ventas en descubierta (es decir, pesos negativos en el portafolio). Además, el retorno esperado en intercambio factibles es no limitado, lo que se sigue del hecho de que los activos no tienen idénticos retornos esperados.

A partir de las condiciones de primer orden para este problema podemos obtener la siguiente relación entre varianza y retorno esperado para un portafolio:

$$\frac{\sigma^2(r_\theta)}{1/C} - \frac{(\mathrm{E}[r_\theta] - A/C)^2}{D/c_2} = 1 \tag{18}$$

donde A, D, y C son constantes determinadas (Huang y Litzenberger).

En el caso de las AFAPS, a las restricciones ordinarias deben agregárseles algunas adicionales, impuestas por un agente cuya utilidad no necesariamente coincide con la de las AFAPS, esto conlleva la pérdida de eficiencia. De forma tal que, para mantener un mismo nivel de riesgo debe disminuirse la rentabilidad esperada.

El siguiente ejercicio es presentado en Accinelli, Piria y Tempone (1999):

$$\text{s.a.} : w_T \mathbf{e} = \mathrm{E}[r_\theta]$$

$$w_T \mathbf{1} = 1$$

$$w_i \geq 0 \ i = 1, 2, \cdots, j; \quad j \leq K,$$

donde la restricción impuesta al modelo es que la inversión hecha en los j primeros activos sea no negativa.

En el referido trabajo se presenta una relación entre valor esperado del portafolio y riesgo, representado por una parábola, la cual es la curva de eficiencia, o lugar geométrico de los portafolios de frontera. Se muestra que el imponer restricciones como la de no negatividad en alguna de las variables, obliga al inversor a asumir riesgo adicional para mantener el nivel anterior de retorno esperado. La curva de frontera para el caso con restricciones impuestas se corre hacia el lado del riesgo positivo, y ahora queda conformada por una serie de parábolas unidas en los puntos en que la restricción impuesta sobre las j primeras variables se hace efectiva.

Se concluye que la imposición de restricciones por parte de un agente, cuyo objetivo no corresponde al de las aseguradoras, implica un costo creciente en términos de riesgo para el inversor.

Apéndice A

Sea $c(\lambda^m)$ una asignación factible $\mathcal{U}(c(\lambda^m)) = \max_{c' \in B} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i(c'_i(\lambda^m))$. Supóngase que $lim_{m \to \infty} \lambda^m = \lambda \in fr(\Delta)$, donde $\lambda_j^m \to 0$, aseguramos que

$$lim_{m \to \infty} \mathcal{U}_j(c_j(\lambda^m)) = \mathcal{U}_j(0).$$

Por contradicción supongamos que no es cierto, entonces exiet $a > 0$ y $t > 0$ tal que para toda $m > M c_j(\lambda^m) > a$ y $\mathcal{U}_j(c_j(\lambda^m)) \geq t$, sea j tal que $\lambda_j^m = min_{i=\{1,2,\cdots,n\}}\{\lambda_i^m\}$. Consideremos una asignación factible $\bar{c}$ tal que $\bar{c}_j = c_j(\lambda_j^{\eta_0}) - \epsilon$ y $\bar{c}_i = c_i(\lambda_j^{\eta_0}) + \frac{\epsilon}{n-1}, \forall_i \neq j$ sea η_0 lo suficientemente grande. Para esta asignación existe alguna ϵ_1 que satisface. $U_j(\bar{c}_j) = t - \epsilon_1$ y $U_h(\bar{c}_h) = t + \epsilon_1$ para toda $h \neq i$. Entonces, para η_0 lo suficientemente grande obtenemos que $\mathcal{U}(c(\lambda^{\eta_0})) < \mathcal{U}(\bar{c})$ esto contradice el supuesto de arriba a cerca de la optimalidad de la asignación $c(\lambda^{\eta_0})$.

Apéndice B

Para ver que $c_i(\lambda_k)$ es una función diferenciable, definimos:

$$\Phi(c(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \Bigg(c(\lambda) + \gamma \sum_{i=1}^{n} (c_i(\lambda, t) - w_i(t) \Bigg).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\Phi_c(c(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = 0 \tag{19}$$

$$\Phi_\gamma(c(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = 0 \tag{20}$$

Definimos la matriz H a través de

$$H = \begin{pmatrix} \Phi_{cc} & \Phi_{c\gamma} \\ \Phi_{\gamma c} & 0 \end{pmatrix}$$

Si H es una matriz invertible, podemos aplicar el teorema de la función implícita y tomando las derivadas con respecto a λ_k, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{cc} & \Phi_{c\gamma} \\ \Phi_{\gamma c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c(\lambda)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial \gamma(\lambda)}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_{c\lambda_k} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Entonces la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial c(\lambda)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial \gamma(\lambda)}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_{c\lambda_k} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

Recordemos que si las funciones de utilidad son estrictamente cóncavas entonces la matriz H es invertible (véase Accinelli (1996)), pero no es una condición necesaria, en Takayama (1974) encontramos condiciones más generales.

Apéndice C

En este apéndice, probamos la integrabilidad de cada derivada $\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}$.

Caso 1: un bien en el presente

En esta subsección suponemos que hay n agentes y solo un bien en el presente, *i. e.* :$i = \{1, 2, \cdots, n\}$ y $l = 1$.

A partir de la condición de primer orden, 19 sigue:

$$\lambda_1 u_1'(c_1) = \lambda_2 u_1'(c_2) = \ldots = \lambda_n u_n'(c_n)$$

$$\lambda_i u_i'' \frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k} - \lambda_j u_j'' \frac{\partial c_j}{\partial \lambda_k} = 0, \; i \neq j \neq k \tag{22}$$

$$\lambda_i u_i'' \frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k} - \lambda_k u_k'' \frac{\partial c_k}{\partial \lambda_k} = u_k'.$$

Y de 20 obtenemos

$$\frac{\partial c_k}{\partial \lambda_k} = -\sum_{i \neq k} \frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k} \tag{23}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$\lambda_k u_k'' \frac{\partial c_1}{\partial \lambda_k} - \lambda_1 u_1'' \frac{\partial c_k}{\partial \lambda_k} = u_k'.$$

$$\lambda_k u_k'' \frac{\partial c_2}{\partial \lambda_k} - \lambda_2 u_2'' \frac{\partial c_k}{\partial \lambda_k} = u_k'.$$

$$\ldots \qquad \ldots \quad \ldots$$

$$\lambda_k u_k'' \frac{\partial c_n}{\partial \lambda_k} - \lambda_n u_n'' \frac{\partial c_k}{\partial \lambda_k} = u_k'.$$

$$\begin{pmatrix} [\lambda_1 u_1'' + \lambda_k u_k''] & \lambda_k u_k'' & \dots & \lambda_k u_k'' \\ \lambda_k u_k'' & [\lambda_2 u_2'' + \lambda_k u_k''] & \dots & \lambda_k u_k'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_k u_k'' & \lambda_k u_k'' & \dots & [\lambda_n u_n'' + \lambda_k u_k''] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial c_2}{\partial \lambda_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial c_n}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k' \\ u_k' \\ \vdots \\ u_k' \end{pmatrix} \tag{24}$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k} = \frac{u_k'[A_{i1} + A_{i2} + \cdots + A_{in}]}{\lambda_k u_k''[A_{i1}] + \cdots + [\lambda_i u_i'' + \lambda_k u_k''][A_{i1}] + \cdots + \lambda_k u_k''[A_{i1}]}.$$

Esto sigue que $\frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k} < 0$, entonces de 23 obtenemos: $\frac{\partial c_k}{\partial \lambda_k} > 0.^{(*)}$

Ahora usando 22, $u_k' > \lambda_i u_i'' \frac{\partial c_i}{\partial \lambda_k}$.

Caso 2: Mas de un bien en el presente

Si las funciones de utilidad son funciones separables, la integrabilidad de cada derivada : $\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}$, esto se prueba en Accinelli (1996).

En el caso mas general como (*) la integrabilidad de estas derivadas, no se obtienen como un resultado inmediato del teorema de la función implícita. Para los casos en los cuales existen, $l > 1$, bienes en el presente, consideraremos funciones de utilidad sobre un conjunto compacto de las funciones C^2.

Es decir, consideraremos que toda $u(s,.)$ pertenece a un subconjuto compacto fijo $\vee$ de $\wedge$, el espacio de todas las funciones medibles en $u : S \times R^l_{++} \to R$, con la topología de C^2-convergencia sobre compactos:

$$\| u \| = ess\ sup_{s \in S} \max_{z \in K} \{ u(s,z) \mid + \mid \partial_u(s,z) \mid + \mid \partial^2 u(s,z) \mid \}.$$

Para todo conjunto compacto $K \subset R^l_{++}$.

References

Accinelli, E. (1994). Existence and Uniqueness of the Equilibrium for Infinite Dimensional Economies. *Estudios de Economía*; Universidad de Chile, 21(2), pp. 313-326.

Accinelli E. (1996). Some Remarks on Uniqueness of Equilibrium in Economies with Infinitely Many Goods. *Estudios Económicos*, COLMEX 11(1), pp. 3 - 33.

Accinelli, E. and M. Puchet (1996). An Application of the Catastrophe Theory in General Equilibrium Theory. Documentos de Trabajo No. 2/96, Depto de Ec. Fac. de CC. Sociales.

Accinelli E, A. Piria, and R. Tempone (1999). Formación de portafolios de eficiencia en presencia de restricciones impuestas. *Estudios Económicos*, COLMEX 14(1), pp. 129-153.

Araujo, A. (1987). The Non-Existence of Smooth Demand in General Banach Spaces. *Journal of Mathematical Economics* 17, pp. 1-11.

Araujo, A and P. K. Monteiro (1989). Existence without Uniform Conditions. *Journal of Economic Theory*, 48, pp. 416-427.

Arrow, K. (1964). The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing. *Review of Economics Studies*, 31, pp. 91-96.

Balasko, Y. (1988). Foundations of the Theory of General Equilibrium. Academic Press, INC.

Bewley, T. (1969). A Theorem on the Existence of Competitive Equilibrium with Infinitely Many Commodities. *Journal of Economics Theory*, 43 pp. 514-540.

Chamberlain, (1988). Asset Pricing in Multiperiod Securities Markets. *Econometrica*, vol. 56, no. 6, pp. 1283-1300.

Chichilnisky, G. (1998). Topology and Invertible Maps. *Advances in Applied Mathmatics*, 21, pp. 113-123.

Duffie, D. Dynamic Assets Pricing. Academic Press, INC.

Duffie, D. and W. Zame (1989). The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, 57, pp. 1279-1297.

Huang, C. and R. Litzenberger. Foundations for Financial Economics. ed. Prentice-Hall International.

Karatzas, I., P. Lakner, J.P. Leoczky, and S. E. Shreve. Equilibrium in a Simplified Dynamic, Stchastic Economy with Heterogeneous Agent. Stochastic Analysis, Ed. by: Mayer-wolf,E.; Merzbach, E. and Shwartz, A. Academic Press.

Mas-Colell, A. (1986). The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices. *Econometrica*, 54, pp. 1039 - 1054.

Mas-Colell, A. and P. K. Monteiro (1990). Self fulfilling Equilibria: An Extensive Theorem for a General Space. *Journal of Mathematical Economics* 26(1) pp. 51-62.

Takayama, A. (1974). Mathematical Economy. Dryden Press.