Revista Mexicana de Economía y Finanzas, Vol. 3, No. 3 (2004), pp. 249-260

VALOR EN RIESGO CON APROXIMACIONES CUADRÁTICAS

Elías Ramírez Ramírez*

Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México

(Recibido 28 junio 2004, aceptado 26 de agosto 2004)

Resumen

En este trabajo se propone un enfoque cuadrático para el cálculo del Valor en Riesgo (VaR) para un portafolio con n activos y m factores de riesgo, basado en la expansión Cornish-Fisher y en el cálculo de la delta y la gamma de cada activo. Esta metodología presenta ventajas sobre técnicas de simulación basadas en la valoración total de la posición ya que es menos intensiva computacionalmente, y sobre técnicas basadas en aproximaciones lineales las cuales tienden a sobreestimar la posición en riesgo cuando el portafolio contiene activos no lineales con respecto a su factor de riesgo asociado, el cual se distribuye normalmente.

Abstract

This paper proposes a quadratic approach for measuring Value at Risk of a portfolio with n assets and m risk factors. It is based on Cornish-Fisher expansion and the delta and gamma of each asset. This Methodology has advantages over simulation techniques based on total valuation of portfolio because it is less computationally intensive, and over lineal approximations techniques that tend to overestimate the risk exposure when the portfolio has assets with a non lineal relationship with respect to its underlying risk factor, which is normally distributed.

Clasificación JEL: G19, G21, G24

Palabras clave: Valor en Riesgo, Portafolios no lineales, Expansión Cornish-Fisher

* Departamento de Contabilidad y Finanzas, Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México. Calle del Puente 222, Oficinas 3, Segundo piso, Col. Ejidos de Huipulco, Del. Tlalpan, 14380, México, D. F., Teléfono: +52(55) 5483 2255. Correo electrónico: elias@itesm.mx

1. Introducción

Sea p un portafolio de activos compuesto por las cantidades $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)'$ para los activos $1, 2, \cdots, n$, con los valores en el tiempo t de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)'$. De esta manera se tiene que el cambio en el valor del portafolio en el intervalo de tiempo de $t + \Delta t$ es:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta v_i, \tag{1}$$

donde ΔP es el cambio en el valor del portafolio de P_t a $P_{t+\Delta t}$ y $\alpha_i \Delta v_i$ es el cambio en el valor de la inversión en el activo i. En esta situación el valor en riesgo para el portafolio de activos "α", dado un nivel de confianza c, se mide por el nivel de pérdida ΔP^* tal que

$$\text{Prob}(\Delta P \leq \Delta P^*) = 1 - c. \tag{2}$$

Con ΔP^* definido como el VaR (valor en riesgo) con un nivel de confianza de c.[1] Lo cual se puede interpretar como la máxima pérdida esperada dentro de un horizonte de tiempo, con un nivel de confianza de c.

Definiendo a la variable u_i como

$$u_i = \frac{\Delta v_i}{v_i}, \tag{3}$$

y sustituyendo en (1), se obtiene

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Delta u_i. \tag{4}$$

Las ecuaciones (1) y (4) corresponden al modelo conocido como lineal, en donde para calcular el valor en riesgo, primeramente se calcula la varianza (desviación estándar) de ΔP

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j, \tag{5}$$

donde σ_P, σ_i y σ_j representan la desviación estándar para $\Delta P, \Delta v_i$ y Δv_j respectivamente, y ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre Δv_i y Δv_j.

Conociendo la desviación estándar del portafolio, el valor en riesgo, dado un nivel de confianza de c es de:[2]

$$\text{VaR}(\Delta t, c) = -Z_{1-c}\, \sigma_P. \tag{6}$$

[1] Algunos autores como Lehar [2000] y Jiang [2001], definen el VaR como: Prob $(\Delta P \leq \Delta P^*) = 1 - c$. Sin embargo, la interpretación que se debe de mantener es que ΔP^* es el cuantil $1 - c$ de la distribución de ΔP.

[2] En este caso particular se esta suponiendo que las $u_i's$ se distribuyen de manera normal. Por lo que, cualquier combinación lineal entre variables aleatorias distribuidas normalmente se distribuye normalmente. (Mood *et al.* (1974), pag. 194.)

en el caso particular de que el nivel de confianza fuera del 99%, el VaR equivale a $2.33\sigma_P$.

2. El Modelo Delta

En el Modelo Delta, la relación no lineal entre los valores de los activos y los factores de riesgo subyacentes es reemplazada por una aproximación lineal basada en la delta[3] de cada activo. El método delta es útil para reducir la dimensionalidad del problema de estimar el valor en riesgo de un portafolio de activos, ya que éste se enfoca en los factores de riesgo en lugar de las posiciones de riesgo. De esta manera, es el método que se utiliza como una primera aproximación para portafolios complicados (Wilson (1998), pag. 83). Sin embargo, uno de sus principales problemas es que no captura las relaciones no lineales en los factores de riesgo.

Supóngase que los activos v_i dependen del tiempo e individualmente de un factor de riesgo, entonces el cambio del valor del portafolio se puede expresar como

$$\Delta P = \mu_P + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \Delta x_i. \tag{7}$$

Lo cual es equivalente a

$$\Delta P = \mu_P + \sum_{i=1}^{n} \eta_i y_i \Delta x_i, \tag{8}$$

con

$$\eta_i = \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i}, \tag{9}$$

$$\mu_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t, \tag{10}$$

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y_i}{y_i}. \tag{11}$$

El término μ_P captura el efecto de primer orden del cambio del valor del portafolio debido al paso del tiempo.[4] Y Δx_i es el cambio en términos porcentuales del factor de riesgo.

Por otro lado, si suponemos que n activos del portafolio son afectados por m factores de riesgo, se tiene la ecuación

$$\Delta P = \mu_p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \Delta x_j. \tag{12}$$

[3] La delta de un activo, δ, se define como la tasa de cambio del valor del activo respecto al cambio en el valor del activo subyacente.

[4] En la práctica μ_P es tan pequeño que usualmente es ignorado.

La ecuación (12) se puede reescribir como

$$\Delta P = \mu_P + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \Delta x_j, \tag{13}$$

con

$$\beta_j = \alpha' \Psi_j, \tag{14}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)', \tag{15}$$

$$\Psi_j = \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_j}, \frac{\partial v_2}{\partial y_j}, \cdots, \frac{\partial v_n}{\partial y_j} \right)'. \tag{16}$$

Si comparamos las ecuaciones (8) y (13) con (4), se puede observar que para calcular el valor en riesgo en el Modelo Delta, lo único que se tiene que hacer es calcular la varianza (desviación estándar) usando la ecuación (5) y después calcular el valor en riesgo usando (6).[5]Observe que en el caso de que el activo sea un bono, la derivada $(\partial v_i / \partial y_i)$ representa la duración modificada multiplicada por el precio del bono y en el caso de las opciones representa a la delta de la opción.

3. Modelo Delta-Gamma

Cuando un portafolio incluye bonos, el efecto de la curvatura de la relación precio-rendimiento se hace más evidente cuanto más pequeña es la tasa de cupón o cuando se incrementa el tiempo al vencimiento (considerando todo lo demás constante), y entonces el valor obtenido a través del método delta tendería a obtener valores menores a los reales. Además, en el caso de que un portafolio incluya opciones, el efecto del parámetro gamma[6] se hace más importante ya que sus efectos se ven incrementados cuando las opciones están *at-the-money* (Jorion (1999), pag. 164). Sin embargo, es poco importante cuando las opciones están *in-the-money*, ya que la gamma es pequeña debido a que la opción equivale esencialmente a una posición en la acción, y cuando están *out-of-the-money*, ya que la delta es cercana a cero y por ende la gamma es baja.

Además, una gamma positiva (por ejemplo, una opción call larga) provoca que la distribución del valor de la opción con respecto al activo subyacente tenga una cola izquierda delgada (es decir, quede sesgada a la derecha) en comparación con una distribución normal, por lo que si solamente usamos el método delta-normal se tendería a calcular una medida de VaR superior a la real. Por otro lado una gamma negativa (por ejemplo, una opción call corta) tiende a generar una distribución sesgada a la izquierda y así el VaR calculado únicamente con el método delta-normal obtendría valores menores a los reales (Hull (2003), pag. 356.)

---

[5] Para lo cual se está suponiendo que los factores de riesgo se comportan con una distribución normal.

[6] El parámetro gamma se define como la tasa de cambio de la delta de un portafolio con respecto al precio del activo subyacente.

3.1 Modelo Delta-Gamma con un solo factor de riesgo

Supóngase que, en primera instancia, los activos del portafolio se ven afectados por un solo factor de riesgo, el cual se comporta normalmente, es decir

$$\Delta x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2). \tag{17}$$

El cambio en el valor del portafolio es

$$\Delta P = \mu_P + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y \Delta x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} y^2 (\Delta x)^2. \tag{18}$$

Ahora se procede a calcular los primeros tres momentos del cambio en el valor del portafolio, los cuales son

$$\mathrm{E}[\Delta P] = \mu_P + \delta \mathrm{E}[\Delta x] + \frac{1}{2}\gamma \mathrm{E}[(\Delta x)^2], \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\Delta P)^2] = \mu_P^2 &+ 2\mu_P \delta \mathrm{E}[\Delta x] + (\mu_P \gamma + \delta^2)\mathrm{E}[(\Delta x)^2] \\ &+ \delta\gamma \mathrm{E}[(\Delta x)^3] + \frac{1}{4}\gamma^2 \mathrm{E}[(\Delta x)^4], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\mathrm{E}[(\Delta P)^3] = \left\{ \begin{array}{l} \mu_P^3 + 3\mu_P^2 \delta \mathrm{E}[\Delta x] + \left(3\mu_P\delta^2 + \frac{3}{2}\mu_P^2\gamma\right)\mathrm{E}[(\Delta x)^2] + \\ + (\delta^3 + 3\mu_P\delta\gamma)\mathrm{E}[(\Delta x)^3] + \left(\frac{3}{4}\mu_P\gamma^2 + \frac{3}{2}\delta^2\gamma\right)\mathrm{E}[(\Delta x)^4] \\ + \frac{3}{4}\delta\gamma^2 \mathrm{E}[(\Delta x)^5] + \frac{1}{8}\gamma^3 \mathrm{E}[(\Delta x)^6], \end{array} \right\} \tag{21}$$

con

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} y, \\ \gamma &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} y^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Obsérvese que en el caso de que el activo sea un bono, la derivada $(\partial v_i/\partial y)$ representa la duración modificada multiplicada por el precio del bono, y la segunda derivada $(\partial^2 v_i/\partial^2 y)$ representaría la convexidad del bono multiplicada por el precio del bono; y en el caso de las opciones representa a la delta y la gamma de la opción, respectivamente. La media, varianza y sesgo se definen por

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta P} &= \mathrm{E}[\Delta P], \\ \sigma_{\Delta P}^2 &= \mathrm{E}[[\Delta P - \mathrm{E}(\Delta P)]^2] = \mathrm{E}[(\Delta P)^2] - [\mathrm{E}(\Delta P)]^2, \\ \xi_{\Delta P} &= \frac{\mathrm{E}[[\Delta P - \mathrm{E}(\Delta P)]^3]}{\sigma_{\Delta P}^3} = \frac{\mathrm{E}[(\Delta P)^3] - 3\mathrm{E}[(\Delta P)^2]\mu_{\Delta P} + 2\mu_{\Delta P}^3}{\sigma_{\Delta P}^3}. \end{aligned} \tag{23}$$

Conociendo los parámetros de media, varianza y sesgo de ΔP, se está en condiciones de aproximar el percentil que se necesita para estimar el valor en riesgo obtenido de la distribución real del cambio del valor del portafolio, a través de la expansión de Cornish-Fisher. De esta forma, el $(1-c)$-ésimo cuantil de la distribución de ΔP se aproxima con[7]

$$\Delta P_{1-c} = \mu_{\Delta P} + \ell_{1-c}\sigma_{\Delta P}, \tag{24}$$

con

$$\ell_{1-c} = Z_{1-c} + \frac{1}{6}(Z_{1-c}^2 - 1)\xi_{\Delta P}. \tag{25}$$

Entonces, el valor en riesgo con un nivel de confianza del $c\%$ es simplemente

$$\text{VaR}(c) = -\ell_{1-c}\, \sigma_{\Delta P}. \tag{26}$$

3.2 Modelo Delta-Gamma con los activos dependientes de m factores de riesgo

Para este caso, supóngase que los m factores de riesgo, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m)'$, que afectan a los n activos del portafolio se comportan con una distribución normal multivariada, es decir

$$\Delta x \sim \mathcal{N}_m(\mu_x, \Sigma), \tag{27}$$

con

$$\mu_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \cdots, \mu_{x_m})', \tag{28}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \cdots & \sigma_{x_1,x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_m,x_1} & \cdots & \sigma_{x_m}^2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

La matriz de Varianza-Covarianza, Σ, de los factores de riesgo puede ser obtenida directamente de las varianzas y covarianzas muestrales obtenidas de los datos históricos, o puede ser actualizada utilizando el método de promedios móviles exponenciales, conocido por sus siglas en inglés EWMA (empleado por *RiskMetrics©*), usando un modelo GARCH(1,1) o a través de cualquier modelo de la familia ARCH (Bollerslev *et al.* (1992)).

El cambio en el valor de cada activo se puede escribir, utilizando notación vectorial como

$$\Delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}\Delta t + \delta_i'\Delta x + \Delta x'\Gamma_i\Delta x, \tag{30}$$

[7] Jaschke (2001) reporta que la aproximación de Cornish-Fisher produce buenos resultados cuando la distribución del portafolio es relativamente cercana a la normal. Además, computacionalmente es más eficiente respecto a técnicas numéricas que permiten encontrar el percentil exacto de una distribución o inclusive la Simulación Monte-Carlo Parcial. Wallace (1958) reporta que la aproximación Cornish-Fisher ha producido buenos resultados sobre distribuciones Chi-Cuadrada, mejorando su precisión al aumentar los grados de libertad. Sin embargo, ambos autores concluyen que el error de la aproximación se incrementa para los niveles cercanos a 0 *o* 1.

con

$$\delta_i = \left(y_1 \frac{\partial v_i}{\partial y_1}, \quad y_2 \frac{\partial v_i}{\partial y_2}, \cdots, y_m \frac{\partial v_i}{\partial y_m} \right)', \tag{31}$$

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_1 y_1 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{1}{2} y_1 y_m \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_1 \partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} y_m y_1 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_m \partial y_1} & \cdots & \frac{1}{2} y_m y_m \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_m \partial y_m} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Y el cambio en el valor del portafolio se puede escribir, utilizando notación matricial, como

$$\Delta P = \mu_P + \delta_v' \Delta x + \Delta x' \Gamma_v \Delta x, \tag{33}$$

con

$$\mu_P = \alpha' \theta \mathrm{d}t, \tag{34}$$

$$\theta = \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial v_2}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)', \tag{35}$$

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i', \tag{36}$$

$$\Gamma_v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Gamma_i. \tag{37}$$

De esta forma, de acuerdo a Mathai y Provost (1992, pp. 53 y 54), los momentos de la distribución del cambio del valor del portafolio de la ecuación (33) son

$$\mathrm{E}[\Delta P] = g_*^{(0)}, \tag{38}$$

$$\mathrm{E}[(\Delta P)^2] = g_*^{(1)} + \left[g_*^{(0)}\right]^2, \tag{39}$$

$$\mathrm{E}[(\Delta P)^3] = g_*^{(2)} + 3 g_*^{(1)} g_*^{(0)} \left[g_*^{(0)}\right]^3, \tag{40}$$

con

$$g_*^{(k)} = \frac{1}{2} k! \sum_{j=1}^{m} (2\lambda_j)^{k+1} + \frac{(k+1)!}{2} \sum_{j=1}^{m} b_j^{*2} (2\lambda_j)^{k-1}, \ k \geq 1, \tag{41}$$

$$g_*^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (2\lambda_j) + (\mu_P + \delta_v' \mu_x + \mu_x' \Gamma_v \mu_x), \ k = 0 \tag{42}$$

y

$$\mathbf{M}' \Sigma^{1/2} \Gamma_v \Sigma^{1/2} \mathbf{M} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m), \tag{43}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}' = \mathbf{I}, \tag{44}$$

$$\mathbf{M}' (\Sigma^{1/2} \delta_v + 2 \Sigma^{1/2} \Gamma_v \mu_x) = \mathbf{b}^* = (b_1^*, \cdots, b_m^*)'. \tag{45}$$

La media, varianza y sesgo se definen como en (23) por

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta P} &= g_*^{(0)}, \\ \sigma_{\Delta P}^2 &= g_*^{(1)}, \\ \xi_{\Delta P} &= \frac{g_*^{(2)}}{\left[g_*^{(1)}\right]^{3/2}}. \end{aligned} \tag{46}$$

Aplicando la expansión de Cornish-Fisher, el $(1-c)$-ésimo cuantil de la distribución de ΔP es

$$\Delta P_{1-c} = g_*^{(0)} + \ell_{1-c}\sqrt{g_*^{(1)}}, \tag{47}$$

con

$$\begin{aligned} \ell_{1-c} &= Z_{1-c} + \frac{1}{6}(Z_{1-c}^2 - 1)\frac{g_*^{(2)}}{\left[g_*^{(1)}\right]^{3/2}} \\ &= Z_{1-c} + \frac{1}{6}(Z_{1-c}^2 - 1)g_*^{(2)}. \end{aligned} \tag{48}$$

Por lo que el valor en riesgo del portafolio P con un nivel de confianza de $c\%$ es

$$\mathrm{VaR}(c) = -\ell_{1-c}\sqrt{g_*^{(1)}}. \tag{49}$$

Por último, utilizando la expresión (41), se pueden derivar las fórmulas para $g_*^{(1)}$ y $g_*^{(2)}$

$$g_*^{(1)} = \sum_{j=1}^{m} 2\lambda_j^2 + b_j^{*2}, \tag{50}$$

$$g_*^{(2)} = \sum_{j=1}^{m} 8\lambda_j^3 + 6b_j^{*2}\lambda_j. \tag{51}$$

4. Un ejemplo de aplicación

Se aplicará el modelo histórico, Delta y Delta-Gamma a dos portafolios de activos. El primero compuesto por tres acciones y el segundo compuesto por cinco bonos cupón cero. Para realizar lo anterior se reunieron datos diarios del periodo del 10 de enero del 2002 al 2 de abril del 2004, correspondientes a las acciones en el mercado mexicano de las empresas: Cemex, Walmart y Telmex; y las tasas correspondientes de CETES a 28, 91, 182, 272 y 360 días.

El primer portafolio está compuesto por las tres acciones: Cemex (500 Acciones), Walmart (700 Acciones) y Telmex (1000 Acciones). El segundo portafolio está compuesto por flujos de efectivo (los cuales pueden ser el valor nominal de bonos cupón cero) con las siguientes cantidades y plazos: 105,000 en un plazo de 28 días; 105,000 en un plazo de 91 días; 500,000 en un plazo de 180 días; 105,000 en un plazo de 272 días y 500,000 en un plazo de 360 días. Esta metodología es consistente con la de mapeo de flujos de efectivo usada por $RiskMetrics$©, en la cual el valor presente de cualquier flujo en el tiempo se puede dividir en vértices específicos, correspondientes a las tasas de interés con datos conocidos (Mina y Xiao (2001)).

Se estimaron los parámetros GARCH(1,1) correspondientes, utilizando máxima verosimilitud. Los valores resultantes se muestran en las Tablas 1 y 2. Una vez obtenidos los parámetros GARCH(1,1) se procedió a calcular las matrices de Varianza-Covarianza para cada punto en el tiempo.

Tabla 1. Parámetros GARCH

Portafolio 1		
α	β	γ
0.861	0.004	0.135

Tabla 2. Parámetros GARCH

Portafolio 2		
α	β	γ
0.844	0.050	0.106

Conociendo las matrices de Varianza-Covarianza históricas de los datos, se calculó el valor en riesgo usando el método de simulación histórica (Método A), el método Delta con la matriz de Varianza-Covarianza muestral con ventana móvil (Método B), el método Delta con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH (Método C), el método Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza muestral con ventana móvil (Método D) y el método Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH (Método E). Así mismo se calculó el intervalo de confianza al 95% para cada uno de los métodos. Los resultados obtenidos se muestran en las Tablas 3 y 4.

Tabla 3. Valores en riesgo obtenidos

Portafolio 1		
Metodología	VaR	Intervalo de Confianza (95%)
Método A	1862.28	(1563.06 , 2417.66)
Método B	2293.31	(2164.58 , 2433.81)
Método C	2279.02	(2151.09 , 2418.65)
Método D	2293.31	(2164.58 , 2433.81)
Método E	2279.02	(2151.09 , 2418.65)

Tabla 4. Valores en riesgo obtenidos

Portafolio 2		
Metodología	VaR	Intervalo de Confianza (95%)
Método A	3564.15	(3270.09 , 8083.74)
Método B	2600.12	(2454.17 , 2759.42)
Método C	2604.69	(2458.48 , 2764.27)
Método D	2597.69	(2360.65 , 2834.73)
Método E	2600.38	(2363.83 , 2836.93)

A fin de probar cada una de las metodologías, se realizó el *BackTesting*, basado en el estadístico de Kupiek (Kupiek (1995)). Los resultados se muestran en las Tablas 5 y 6.

Tabla 5. Back Testing

Portafolio 1		
Metodología	Excepciones (510 datos)	Excepciones (255 datos)
Método A	11	2
Método B	6	1
Método C	5	1
Método D	6	1
Método E	5	1

Tabla 6. Back Testing

Portafolio 2		
Metodología	Excepciones (510 datos)	Excepciones (255 datos)
Método A	4	0
Método B	9	3
Método C	8	4
Método D	8	2
Método E	8	4

Con respecto al portafolio 1, se tiene que el método de simulación histórica se rechaza con 510 datos al tener un número de excepciones mayor a 10 (de acuerdo con Kupiek el máximo número de excepciones para 510 datos es de 10), no pudiéndose rechazar los otros 4 métodos. Si se analizan los resultados con los últimos 255 datos (información reciente) se observa que no se puede rechazar ninguno de los métodos (el criterio para 255 datos es que el número de excepciones sea menor que 7). Y si se analizan los datos con los 255 datos más antiguos se tiene que se rechaza nuevamente el método de simulación histórica (con 9 salidas obtenidas de la diferencia de 11 salidas para 510 datos y 2 salidas para los últimos 255 datos) y los demás no se rechazan.

Sin embargo, al analizar los datos de acuerdo al criterio de Basilea (*Basle Committee on Banking Supervision* (1996)) y realizando el escalamiento de sus tablas para 510 datos y 255 datos,[8] se tiene que el modelo de simulación histórica (Método A) estaría en la zona amarilla, el método Delta de matriz de Varianza-Covarianza con pesos iguales (Método B) estaría en amarillo si se analizan los

[8] Un modelo se encuentra en la zona verde si el número de excepciones va entre 0 y 4 para 255 datos, y entre 0 y 10 para 510 datos. Se encuentra en la zona amarilla si el número de excepciones queda entre 5 y 9 para 255 datos, y entre 10 y 19 para 510 datos. Por último, se encuentra en la zona roja si se tienen más de 10 excepciones para 255 datos y más de 20 excepciones para 510 datos. De acuerdo a la zona en que se encuentre un modelo, se establece un multiplicador de corrección que va creciendo, conforme el modelo esté en verde, amarillo o rojo, de 1.00 hasta 3.00.

datos más antiguos (5 salidas), el método Delta con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH (Método C) estaría en verde. Vale la pena mencionar que en este portafolio conformado por acciones, la aproximación Delta-Gamma da los mismos resultados que la aproximación Delta.

Con respecto al portafolio 2, se tiene que el método de simulación histórica (Método A) no se puede rechazar con 510 datos ni con 255 datos, y de acuerdo al criterio de Basilea estaría en Verde. Respecto de los métodos Delta y Delta-Gamma de la matriz de Varianza-Covarianza con pesos iguales (Métodos B y D) se tiene que no se pueden rechazar con 510 datos ni con 255 datos, tanto con los primeros 255 como con los últimos 255 datos. Sin embargo, de acuerdo al criterio de Basilea estaría en amarillo, porque los 255 datos más antiguos tienen en ambos casos 6 excepciones (9 menos 3 para el método B y 8 menos 2 para el método D). Por último, los métodos Delta y Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada con GARCH, no se pueden rechazar con 510 datos ni con 255 datos y en el criterio de Basilea estaría en Verde.

Un punto importante a notar es que aunque los métodos Delta y Delta-Gamma con la matriz de Varianza-Covarianza actualizada por GARCH (Métodos C y D, respectivamente), en los dos portafolios tuvieron buenos resultados, pero el estimado de valor en riesgo del método Delta-Gamma es menor o igual al del Delta, lo cual en términos de regulación es deseable para la institución financiera que busca tener menos reservas de capital como contingencia para las pérdidas no esperadas.

5. Coclusiones

En este trabajo se presenta la aplicación de un modelo no lineal basado en los parámetros delta-gamma de los instrumentos financieros, se presentan las ecuaciones que permiten la solución del mismo y a su vez se presenta la expansión de Cornish-Fisher como una alternativa de solución, la cual no requiere llevar a cabo una simulación de los resultados sino únicamente requiere el conocimiento de los primeros tres momentos de la distribución. A través de los resultados se puede observar que la expansión Cornish-Fisher, en combinación con una expansión cuadrática permite obtener valores de riesgo que tienden a pasar la prueba de Kupiek. Una ventaja de este modelo es que puede utilizarse la actualización de las varianzas y covarianzas usando un modelo GARCH (o cualquiera de la familia ARCH) que permiten la incorporación de heteroscedasticidad y el comportamiento de volatilidades por ráfagas, con lo que se incorpora al modelo la volatilidad estocástica.

Bibliografía

Ahn, D., J Boudoukh, M. Richardson, and R. F. Whitelaw (1999). Optimal Risk Management Using Options. *Journal of Finance*, 54(1), pp. 359-375.

Basle Committee on Banking Supervision (1996). Supervisory Framework for the use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements, Bank For International Settlements.

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

Bollerslev, T., R Y. Chou, and K. F. Corner (1992). ARCH Modeling in Finance. *Journal of Econometrics*, 52, pp. 5-59.

Britten-Jones, M and S. Schaefer (1999). Non-Linear Value-at-Risk. *European Finance Review*, pp. 161-187.

Duffie, D and J. Pan (1997). An Overview of Value At Risk. *The Journal of Derivatives*, 4(3), pp. 7-49.

El-Jahel, L, W. Perraudin, and P. Sellin (1999). Value at Risk for Derivatives. *The Journal of Derivatives*, pp. 7-26.

Engle, R. and J. Mezrich (1996). GARCH for Groups. RISK, August, pp. 36-40.

Hull, J. (2003). Options, Futures & Other Derivatives. Fifth Ed., Prentice Hall.

Jiang, G. (2001). VaR with stochastic volatility. *Derivatives Use, Trading & Regulation*. 7 (1), 73-80.

Jaschke, S. (2001). The Cornish-Fisher-Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations. Discussion Paper, Humboldt-Universität Berlin.

Jorion, P. (1997). Value At Risk. First Ed. Mc. Graw Hill, New York.

Johnson N., S. Kotz, and N. Balakrishnan (1994). Continuous Univariate Distributions Volume 1. Second Edition, John Wiley & Sons, New York.

Morgan, J. P. (1995). Riskmetrics Technical Manual, New York: J. P. Morgan Bank.

Kupiek, P. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, 2, pp. 73-84.

Lehar, A. (2000). Alternative Value-at-Risk Models for Options. Working Paper. Department of Business Studies. University of Vienna. March 31.

Mathai, A. and B. Provost (1992). Quadratic Forms in Random Variables. First Edition. Marcel Dekker Inc., New York.

Mina, J. and J. Xiao (2001). Return to Riskmetrics: The Evolution of a Standard. Riskmetrics, 2001. www.riskmetrics.com

Mood, A., F. Graybill, and D. Boex (1974). Introduction to the Theory of Statistics. Third Edition. Mc-Graw Hill, Japan.

Wallace, D. (1958). Asymptotic Approximations to Distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*. 29(3), pp. 635-654.

Wilson, T. (1998). Risk Management and Analysis. Vol.1: Measuring and Modelling Financial Risk. Edited by Carol Alexander Thomas Wilson, McKinsey & Company, Inc.