

Valuación de opciones asiáticas con volatilidad realizada y reversión a la media: caso CEMEXCPO

Ambrosio Ortiz Ramírez ¹   - Instituto Politécnico Nacional, México
Ana Lorena Jiménez Preciado   - Instituto Politécnico Nacional, México

Resumen

El objetivo de este trabajo es valorar opciones asiáticas con volatilidad realizada y reversión a la media sobre precio de CEMEXCPO mediante el método Monte Carlo. La dinámica del activo subyacente y su volatilidad son modelados bajo el enfoque de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) correlacionadas. La estimación de los parámetros del sistema de EDE que conduce la volatilidad de acuerdo con Bishwal (2023). La aplicación de la metodología propuesta proporciona resultados suficientemente cercanos a los observados para opciones europeas en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) para plazos cortos.

Classificación JEL: C63, C15, G13.

Palabras clave: simulación estocástica, método de Monte Carlo, opciones asiáticas.

Asian options pricing with realized volatility and mean reversion: CEMEXCPO case

Abstract

The objective of this work is to value Asian options with realized volatility and mean reversion on the CEMEXCPO price using the Monte Carlo method. The dynamics of the underlying asset and its volatility are modeled under the correlated stochastic differential equations (SDE) approach. The estimation of EDE system parameters drives volatility according to Bishwal (2023). The application of the proposed methodology provides results sufficiently close to those observed for European options in The Mexican Derivatives Exchange (MexDer) for short terms.

JEL Classification: C63, C15, G13.

Keywords: stochastic simulation, Monte Carlo method, Asian options.

¹ Autor de correspondencia. Email: amortiz@ipn.mx. Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía

*Sin fuente de financiamiento para el desarrollo de esta investigación.



1. Introducción

La incertidumbre generada por los mercados financieros en los que interactúan agentes requiere a las ciencias aplicadas metodologías robustas para la valuación de activos. Desde un enfoque teórico y multidisciplinario se han propuesto diversas metodologías que coadyuvan en el análisis y explicación de la aleatoriedad de los acontecimientos inherentes de la interacción de los mercados, con modelos innovadores para la valuación de activos, gestión de riesgos y el crecimiento económico, entre otros. Se puede afirmar que el mercado de capitales y la actividad económica forman parte de una dinámica compleja, ya que la operación del mercado accionario tiene una influencia en la actividad económica real, véase por ejemplo Brugger y Ortíz (2012). El mercado de capitales mexicano aún con la pandemia de COVID19, ha sostenido una trayectoria creciente en los últimos años, sin embargo, se nota una gran diferencia respecto a sus socios comerciales del T-MEC debido al tamaño de sus economías, energéticos como el petróleo y gas, entre otros factores. Con un efecto negativo a nivel mundial está la crisis por la guerra de Ucrania y Rusia en 2022, crisis que ha escalado con consecuencias en la economía mundial, por ejemplo, la demanda de gas natural en Europa. (World Economic Forum, 2023).

En este contexto, los agentes asumen riesgos que proceden de las variaciones en precios de activos financieros. Tales variaciones pueden generar grandes pérdidas con efectos significativos. Una propuesta de solución a esto es el desarrollo y aplicación de derivados financieros. Un derivado se define como un instrumento financiero cuyo valor depende (o se deriva) de los valores de otras variables subyacentes más simples. Por lo general, tales variables subyacentes son precios de activos negociados en mercados financieros. La negociación de opciones asiáticas en un mercado de derivados es importante debido a sus beneficios para los participantes y su impacto en la economía en sectores clave como materias primas y farmacéuticos en los que aranceles pueden afectar significativamente los costos y la cadena de suministro, estas opciones permiten cubrir riesgos asociados a cambios imprevistos en los precios de insumos o productos terminados.

En lo que respecta la utilización de derivados se encuentran las opciones financieras y para su valuación debe tenerse en cuenta los puntos siguientes: 1. Las opciones típicas o plain vanilla pueden ser de compra (call) o de venta (put), que también se distinguen por su manera de ser ejercida, es decir: estilo europeo o americano, son listadas tanto en mercados de valores regulados como en mercados sobre mostrador o mercados Over The Counter (OTC). 2. Las opciones exóticas o de segunda generación, son las que impliquen una modificación a una o más variables de las opciones típicas y se negocian fundamentalmente en mercados OTC, estas surgen para atender requerimientos concretos de los agentes, en gran medida son acuerdos diseñados a la medida en cuanto a cantidad, calidad y tipo de subyacente, entre otros.

Las opciones asiáticas son de opciones de segunda generación, se negociaron en 1987 en Tokio, de ahí su nomenclatura. Su denominación proviene del hecho que su precio se determina en función de la dinámica del subyacente durante la vigencia del contrato. En particular, la valoración de opciones asiáticas con media aritmética es una línea de investigación aún por explorar. Por ejemplo, el promedio geométrico del precio es exactamente lognormal y el promedio aritmético es aproximadamente lognormal y representa un problema llegar a una distribución tratable con procesos estocásticos usuales.

En general, los métodos para la valoración de derivados se clasifican en analíticos y numéricos. El primer enfoque es extenso para modelar funciones de pago de opciones con ecuaciones diferenciales parciales (EDP), en Pirjol y Zhu (2017) se obtienen aproximaciones a precios de opciones asiáticas con ejercicio tanto fijo como flotante en el modelo de Black y Scholes. Asimismo, en Koh et al. (2019) presentan ejemplos numéricos con diferencias finitas. En el trabajo de Pergamenchtchikov y Shishkova (2020) se aborda el problema de cobertura de opciones asiáticas con costos de transacción al compensar los pagos de todas las transacciones, incluso si su número aumenta de forma ilimitada. En Bernal (2020) et al, se examina el efecto de los derivados sobre la relación entre el tipo de cambio y el mercado de valores con un análisis empírico utilizando la estrategia GMM para los mercados bursátiles de México y Brasil para el periodo 2007 a 2019. El resultado más importante es que además del tipo de cambio spot, los futuros de tipo de cambio explican la exposición cambiaria. En Gan, Wang y Yang (2020) se discuten las ventajas de las opciones asiáticas con subyacente promedio y proponen un método robusto basado en aprendizaje automático para valorar opciones asiáticas con promedio aritmético y geométrico de manera eficiente. Anceschi, et al (2021) prueban la existencia y unicidad de la solución fundamental para los operadores de Kolmogorov asociados a algunos procesos estocásticos que surgen en el método de portafolios replicantes en la determinación de precios en opciones dependientes de la trayectoria. Roul (2022) se propone un enfoque alternativo basado en B-splines exponenciales, analizan la volatilidad, la tasa y vigencia, y los valores delta relacionados con la aproximación al derivado. En Alsenafi, Alazemi y Alavi (2025) valoran opciones asiáticas con promedio geométrico al plantear y resolver la ecuación diferencial parcial asociada que caracteriza el precio de la opción mediante la implementación de un algoritmo en tiempo semi discreto combinado con diferencias forward y B-splines cúbicos.

En el caso de métodos numéricos se tiene al método de Monte Carlo, su amplio uso se debe a que permite encontrar soluciones aproximadas en modelación matemática que involucran procesos estocásticos. Sin duda, el trabajo pionero de Boyle (1977) es el referente principal, así como Boyle et al. (1997). En Larcher (2022) se desarrollan métodos de valuación de opciones asiáticas mediante simulación Monte Carlo con promedio geométrico y opciones de barrera con reducción de varianza con varios ejemplos aplicados a diferentes subyacentes. En Ewald, Wu y Zhang (2023) obtienen fórmulas cerradas para el precio de opciones asiáticas sobre futuros de materias primas con los supuestos de tasas de conveniencia y tasa de interés estocásticas con saltos. Si el promedio es geométrico y sin saltos hay una expresión analítica, en otros se toma tal resultado como variable de control para el precio de la opción asiática con promedio aritmético. En el caso de saltos primero condicionan los tiempos de salto y luego promedian las secuencias de saltos. En Abbasi y Nouri (2025) proponen la valuación de opciones asiáticas en un entorno de incertidumbre cuando el precio del subyacente es conducido por un modelo exponencial de Ornstein-Uhlenbeck y obtienen fórmulas cerradas para opciones asiáticas con barrera del tipo knock-in y knock-out utilizando alpha trayectorias de ecuaciones diferenciales. Algunas innovaciones en este enfoque extienden el método de Monte Carlo con modificaciones en la estructura de dependencia, véanse Kahalé (2021), Cruz-Aké, et al (2021), Alaya, et al. (2022) y Brignone et al. (2024) por mencionar algunos.

El presente trabajo difiere de otros en cuanto a que propone un procedimiento por simulación Monte Carlo para la valuación de opciones asiáticas con subyacente promedio en un sistema de EDE correlacionadas, en el cual la volatilidad se calibra con una adaptación del modelo CIR a volatilidad

realizada, el procedimiento propuesto contrasta precios obtenidos con los publicados en el boletín de MexDer. Es importante señalar que hasta donde se conoce, no se cotizan este tipo de derivados en el MexDer, por lo que la metodología propuesta puede ser de utilidad para que en un futuro se listen este tipo de opciones como una alternativa de cobertura sobre otros subyacentes, tal y como sucede, por ejemplo, en el CBOE. Uno de los resultados interesantes que se obtienen, es que en el corto plazo los precios de opciones asiáticas y europeas son similares cuantitativamente, este hecho se explica porque el spot no difiere tanto del promedio, excepto en los extremos y plazos más largos.

El resto de esta investigación se compone de la siguiente manera, en la siguiente sección se presenta la definición de opción asiática, la clasificación del promedio en tiempo discreto y continuo, luego, se describe el método para cuantificar calls y puts asiáticas con volatilidad dinámica en un sistema de EDE's con correlación. Se estiman los parámetros con una serie histórica de volatilidad realizada del subyacente y el modelo de Cox, Ingersoll y Ross, 1985 (CIR) según Bishwal (2023). En la tercera sección se presenta y discute la evidencia empírica del método propuesto, en esa parte los precios calculados son comparados con los del boletín del portal de internet del Mexicano de Derivados al 10 de julio 2023 para CEMEXCPO, en este caso para la tasa de interés se ocupa CETES que se recaba del portal de Banco de México. Se concluye con la cuarta sección.

2. Metodología

Como ya se ha comentado una clasificación de las opciones que depende de su estructura es opciones plain vanilla y opciones exóticas. En el segundo caso existe una gran variedad de tipos y su precio depende tanto de su precio final como de sus cambios en la temporalidad del contrato, por ejemplo, opciones asiáticas, con barrera y/o doble barrera tipo knock-in, knock-out (muy dependientes de la trayectoria), opciones bermuda pertenecen a esta clasificación.

Una opción asiática es aquella en la que el pago está sujeto al promedio aritmético o geométrico del activo a lo largo de su vigencia. Por consiguiente, el pago de una opción asiática que vence en T está en función de una serie de observaciones $X_1, \dots, X_n$ hechas fechas predefinidas $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Por ejemplo, se puede elegir alguna de las definiciones de promedio: aritmético M_a o geométrico M_g para caracterizar la función de pago de una opción asiática:

$$M_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad M_g = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}.$$

Asimismo, si se modela en tiempo discreto o continuo la media y se atribuyen pesos equitativos en su cálculo como se muestra en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Definición de la media.

Media	Tiempo discreto	Tiempo continuo
Aritmética	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{t_i}$	$\frac{1}{T} \int_0^T X_t dt$
Geométrica	$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{1/n}$	$\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln X_t dt\right)$

Fuente: elaboración propia.

Existen varias investigaciones que contemplan alguno de los casos del Cuadro 1 con su correspondiente complejidad, véase el documento de Gan et al. (2020).

2.1. Estimación de parámetros y valoración de opciones con subyacente promedio

Un hecho empírico de varias variables económicas, como las tasas de interés, las tasas de inflación, volatilidad e incluso precios de materias primas, es que muestran una tendencia hacia niveles más bajos (niveles más altos), cuando son demasiado altos (bajos). Esta propiedad se denomina reversión a la media y se puede modelar utilizando un proceso estocástico, como en Hull y White (1987), Heston (1993), Stojkoski et al. (2020) entre otros. En la práctica sigue representando un tópico tanto numérico como computacional.

Considere un sistema de dos EDE para calcular el precio de una opción asiática con subyacente promedio, la primera modela el precio X_t y la segunda la volatilidad $\sigma_t^2 = \varepsilon_t$.

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{X_t} &= rdt + \sqrt{\eta_t} dB_{X_t} \\ d\varepsilon_t &= a(b - \varepsilon_t)dt + \eta_t \sqrt{\varepsilon_t} dB_{\varepsilon_t} \end{aligned} \quad (1)$$

aquí B_{X_t} es un movimiento browniano correlacionado con B_{ε_t} , es decir $\text{Cov}(dB_{X_t}, dB_{\varepsilon_t}) = \rho dt$, $a > 0$, $b > 0$ y $\eta_t > 0$ con valores constantes. Se dice que la segunda EDE tiene reversión a la media puesto que si $\varepsilon_t < b$, entonces la parte determinista $a(b - \varepsilon_t) > 0$ y se anticipa una subida de volatilidad o si $\varepsilon_t > b$ entonces $a(b - \varepsilon_t) < 0$ y se espera una bajada. Para simular el sistema se plantea una dependencia:

$$d\tilde{B} = \begin{pmatrix} dB_{X_t} \\ dB_{\varepsilon_t} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad (2)$$

con la descomposición de Choleski en

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta t & \rho_{\varepsilon_t, X_t} \Delta t \\ \rho_{X_t, \varepsilon_t} \Delta t & \Delta t \end{pmatrix}.$$

Para ello en primero lugar se calcula S dado que $\Sigma = SS^T$ y plantear la distribución de $dW \sim \mathcal{N}(0, I_W^2)$ para obtener $d\tilde{B} = XdW$, como se muestra más adelante en la discretización de (1) por lo regular se elige a $\Delta t = T/M$ con $M = 252$, luego se aplica con el método de Barraquand (1995) generar muestras de dW , que incorpora a $d\tilde{B}$ implícitamente. Sean las matrices de media y covarianzas de dW :

$$\mu_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \Sigma_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al discretizar el sistema dado en (14) y por el método Monte Carlo se ejecuta la valoración de opciones. Bajo esas condiciones si c_{X_T} denota el precio del call y p_{X_T} el del put con subyacente promedio y precio de ejercicio E :

$$c_{X_T} = \max\left(\frac{1}{T} \int_0^T X_\tau d\tau - E, 0\right) \quad y \quad p_{X_T} = \max\left(E - \frac{1}{T} \int_0^T X_\tau d\tau, 0\right).$$

En concreto, el procedimiento para la valoración de las opciones se presenta a continuación:

- 1) Se definen dB_{X_t} y dB_{ε_t} como:

$$\begin{aligned} dB_{X_t}^{(k)} &= W_{X_t}^{(k)} \sqrt{\Delta t} \\ dB_{\varepsilon_t}^{(k)} &= \rho W_{\varepsilon_t}^{(k)} \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1 - \rho^2} W_{\varepsilon_t}^{(k)} \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (3)$$

- 2) Estimar los parámetros: a , b and η .

- 3) Discretizar el sistema de EDE en un esquema de Euler (Venegas, 2008, p. 856):

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_{i+1})^{(q)} &= a_i^{(q)} + b(\theta - \varepsilon(t_i)^{(q)})\Delta t + \eta \sqrt{\varepsilon(t_i)^{(q)}} \Delta B_{\varepsilon_t}^{(q)} \\ X_{i+1}^{(q)} &= X_i^{(q)} \left(1 + \varepsilon(t_i)^{(q)} \Delta t + \varepsilon(t_i)^{(q)} \Delta B_{X_t}^{(q)} \right), \quad i = 1, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (4)$$

- 4) Calcular el promedio $\bar{X}^{(q)}$ de los valores finales de cada trayectoria:

$$\bar{X}^{(q)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(q)}. \quad (5)$$

- 5) Calcular precios de las opciones call y put:

$$\hat{c} = e^{-rT} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \max(\bar{X}^{(q)} - E, 0) \quad (6)$$

y

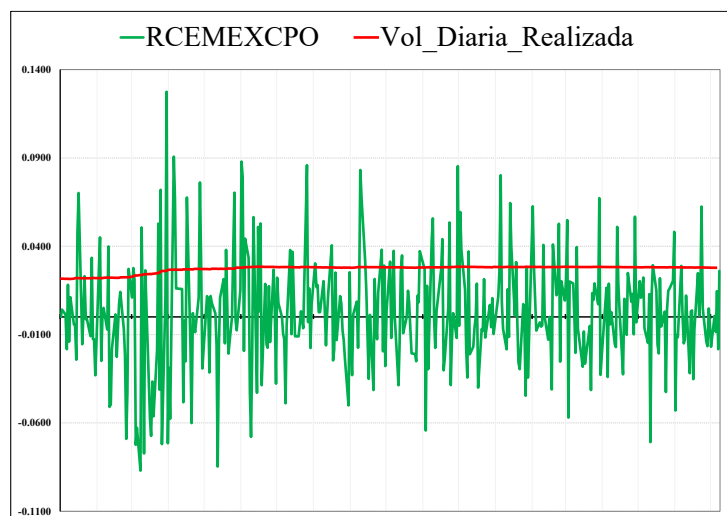
$$\hat{p} = e^{-rT} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \max(E - \bar{X}^{(q)}, 0) \quad (7)$$

donde j se ocupa en un ciclo de la simulación para generar q precios asociados a (4). El procedimiento anterior puede configurarse tal que es factible modificar la función de pago a otro tipo de derivado.

3. Aplicación de la metodología

Con los pasos descritos en la sección anterior se ejecutan simulaciones en Matlab (c) para valorar opciones asiáticas con subyacente promedio sobre CEMEXCPO. Se contrastan los resultados con la información del boletín de MexDer del 10 de julio de 2023. La tasa CETES se recaba de la página de Banco de México y se ejecuta interpolación donde se requiere. Los coeficientes de modelo CIR a volatilidad realizada se estiman según Bishwal (2023). El periodo de estudio de volatilidad realizada del subyacente es del 3 de enero de 2022 al 10 de julio de 2023 con 383 observaciones. La Gráfica 1 exhibe variaciones logarítmicas de CEMEXCPO y la serie de volatilidad diaria. Se observan variaciones importantes con ascensos y descensos en el periodo de la muestra.

Gráfica 1. Variaciones logarítmicas diarias de CEMEXCPO y volatilidad realizada.



Fuente: elaboración propia.

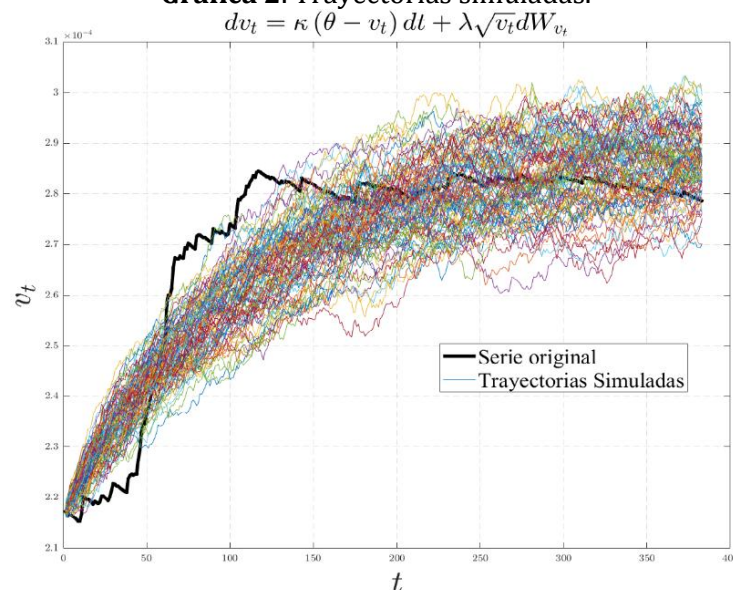
Los coeficientes estimados con el método de Overbeck y Rydén (1997) y su extensión en Bishwal (2023) para el modelo CIR dados en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Coeficientes estimados.

Coeficiente	a	b	η	No. Obs.	Cociente de verosimilitud
valor	2.222742	0.028964	0.008282	383	7.928659

Fuente: Elaboración propia.

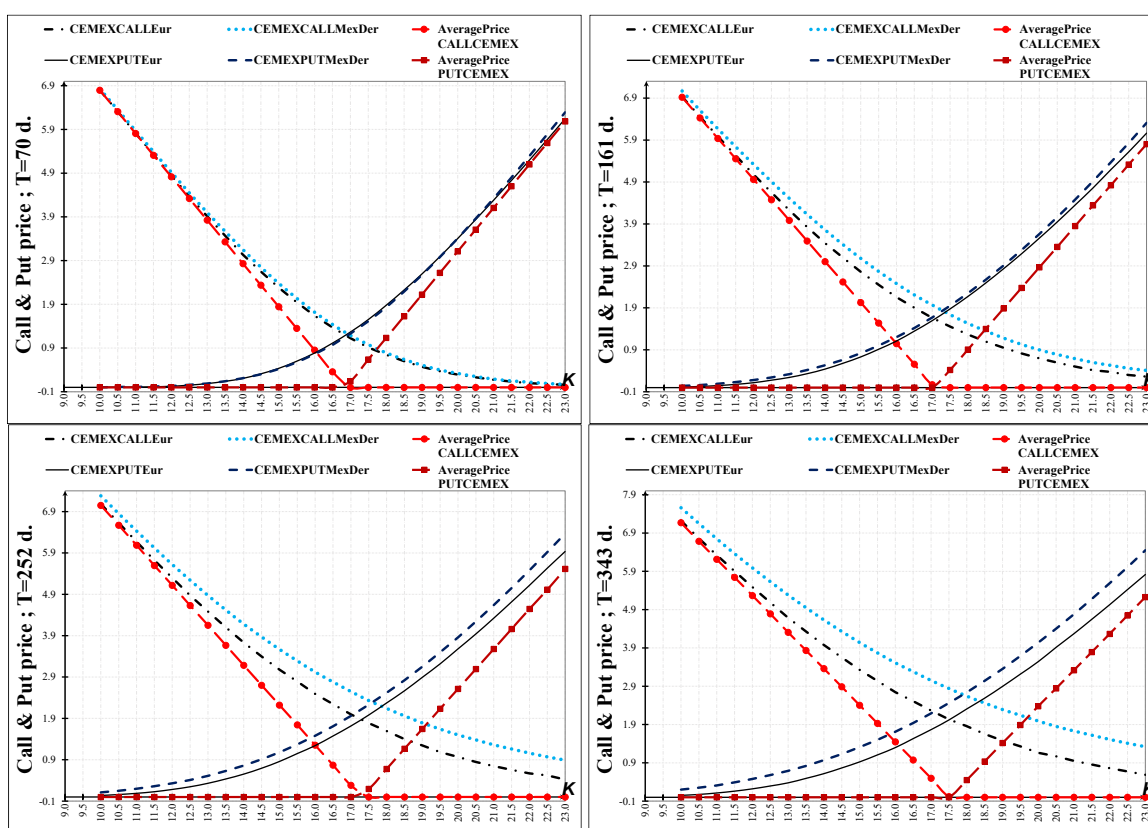
Gráfica 2. Trayectorias simuladas.



Fuente: elaboración propia.

Con los coeficientes en el Cuadro 2, el lector puede comprobar que $2ab \geq \eta^2$, que se conoce como propiedad de positividad de Feller, que asegura que la primera EDE en (1) no tocará el cero. La Gráfica 2 presenta trayectorias con la segunda EDE en (1) y la serie original de volatilidad. Se observa que las trayectorias son consistentes con la tendencia alcista que proviene de la inercia del precio del activo. En la Gráfica 3 se exhiben precios de calls y puts de tipo europeo, y precios de opciones asiáticas con la metodología descrita anteriormente, los plazos que se obtienen del boletín son $T = 70, 161, 252$ y 343 días, los precios de ejercicio comienzan en \$10 a \$23 con variaciones uniformes de \$0.50. Los precios calculados se contrastan con los del boletín del 10/07/2023, en ese día el precio de cierre de CEMEXCPO fue de \$16.71. La simulación Monte Carlo es con $m = 50,000$ trayectorias y una correlación inicial de $\rho = -0.5$.

Gráfica 3. Precios de opciones europeas reportados por MexDer a cuatro plazos comparados con las opciones asiáticas obtenidos por simulación Monte Carlo.

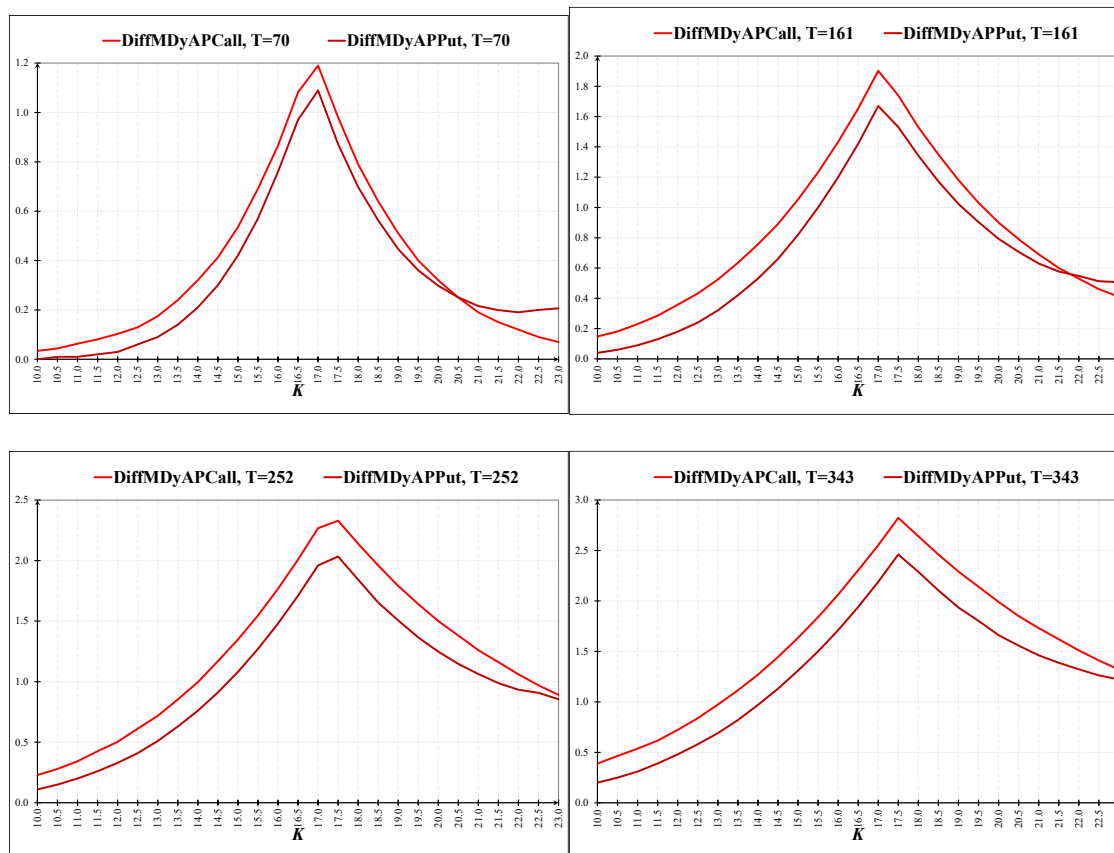


Fuente: elaboración propia.

La información del boletín señala que son veintisiete precios de ejercicio, en catorce de ellos el precio de CEMEXCPO es mayor que el precio de ejercicio para opciones de compra; para opciones de venta solo en trece. Con el propósito de observar la diferencia de precios entre los publicados por MexDer y los obtenidos con la metodología propuesta se muestran en la Gráfica 4, al compararlos se observa que conforme el plazo aumenta la diferencia se incrementa. Esto se debe a que en el corto plazo el precio spot del subyacente no difiere significativamente del promedio, por ello en para

opciones de compra con subyacente promedio in the money son cero, mientras que para opciones de venta con subyacente promedio out of the money ocurre lo mismo.

Gráfica 4. Diferencias de precios publicados por MexDer y los calculados de opciones asiáticas con promedio del subyacente, tanto de compra como de venta a los cuatro plazos



Fuente: elaboración propia.

Al contrastar los calls y puts de tipo europeo a plazo de 70 días y la información del portal de internet de MexDer el 10 de julio 2023 con los precios simulados para asiáticas, resultan ser semejantes, sin embargo, para los otros vencimientos de 161, 252 y 353, la distancia de precios es notoria. Una posible explicación de este hecho es que la volatilidad del promedio aritmético muestra poca variación. En resumen, la evidencia empírica permite inferir que en el corto plazo los precios de opciones asiáticas y europeas son similares cuantitativamente, que se explica debido a que el spot es cercano al promedio aritmético, excepto en los extremos y plazo al vencimiento mayores.

4. Conclusiones

Las opciones asiáticas son derivados cuyos pagos dependen del valor promedio del precio del activo subyacente durante un período de tiempo establecido previamente. La gran mayoría de las funciones de pago asociadas a este tipo de instrumentos no permiten una solución analítica y, por lo tanto, con frecuencia se encuentran soluciones aproximadas dependiendo del enfoque con el que se aborde el

problema. En esta investigación se ha propuesto una metodología basada en simulación Monte Carlo para la valuación de opciones asiáticas con volatilidad realizada y reversión a la media.

En este trabajo se valúan calls y puts de tipo europeo, y con precio promedio (asiática) con media aritmética sobre CEMEXCPO con el método de Monte Carlo. Una estructura de dos EDE's modela precios y su volatilidad con correlación arbitraria. Se estiman los parámetros de la EDE que conduce la volatilidad de acuerdo con Overbeck y Rydén (1997) y, más recientemente, Bishwal (2023) en tiempo discreto al modelo CIR con volatilidad realizada. Se usa el método propuesto en Barraquand (1995) en el esquema de discretización de Euler. La evidencia empírica muestra que en el corto plazo los precios de opciones asiáticas y europeas son muy cercanos, este hecho puede explicarse porque el spot no difiere tanto del promedio, excepto en los extremos y plazos más largos. Estos resultados pueden ser útiles para un agente que busca una cobertura con costos más asequibles o incluso podría formar parte de la oferta de contratos de opciones en MexDer como se estila en otros mercados organizados. A nivel macroeconómico, la adopción de este tipo de instrumentos financieros fomenta la estabilidad del mercado, atrae inversiones y promueve el crecimiento económico. Además, al mitigar los riesgos asociados a los aranceles, se facilita el comercio internacional y se protege la competitividad de sectores estratégicos, contribuyendo al desarrollo sostenible de la economía.

No obstante, los supuestos parsimoniosos de la metodología propuesta en este trabajo los resultados son enriquecedores en el sentido que un contrato con opciones asiáticas representaría una recomendación para un agente que prefiere un riesgo moderado sobre un subyacente como puede ser el precio de la mezcla mexicana de exportación u otras materias primas, bonos cupón cero y con cupón, en los mercados de: divisas, criptomonedas, energía o en el mercado OTC. En lo que se refiere a la metodología se puede ampliar al planteamiento y solución de la ecuación diferencial parcial con los supuestos del modelo o al uso de variables antitéticas en la simulación Monte Carlo o añadir la presencia de saltos en tiempo discreto o continuo.

Referencias

- [1] Abbasi, B., Nouri, K. (2025). Exponential Ornstein–Uhlenbeck model for Asian barrier option pricing in uncertain environment. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 42, 525-551. <https://doi.org/10.1007/s13160-024-00682-2>
- [2] Alaya, M.B., Kebaier, A. & Ngo, T.B.T. (2022). Central limit theorem for the antithetic multilevel Monte Carlo method. *Annals of Applied Probability*, 32(3), 1970-2027. <https://doi.org/10.1214/21-AAP1726>
- [3] Alsenafi, A., Alazemi, F. & Alavi, J. (2025). An efficient algorithm to solve the geometric Asian power option price PDE under the stochastic volatility model. *Numerical Algorithms*, 98, 287-306. <https://doi.org/10.1007/s11075-024-01794-z>
- [4] Anceschi F., Muzzioli, S. & Polidoro, S. (2021). Existence of a fundamental solution of partial differential equations associated to Asian options. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 62, 103373. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103373>

- [5] Barraquand, J. (1995). Numerical Valuation of High dimensional multivariate European securities. *Management Science*, 41(12), 1882-1891. <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.12.1882>
- [6] Bernal-Ponce, L. A., C. E. Castillo-Ramírez & F. Venegas-Martínez (2020). Impact of Exchange Rate Derivatives on Stocks in Emerging Market. *Journal of Business Economics and Management*, 21(2), 610-626. <https://doi.org/10.3846/jbem.2020.12220>
- [7] Bishwal, J. P. N. (2023). Interest rate derivatives for the fractional Cox-Ingersoll-Ross model. *Algorithmic Finance*, 2023, 10(1-2), 53-66. <https://doi.org/10.3233/AF-220467>
- [8] Boyle, P.P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3) 323-338. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90005-8](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90005-8)
- [9] Boyle, P., Broadie, M. & Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1267-1321. [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889\(97\)00028-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889(97)00028-6)
- [11] Brignone, R., Gonzato, L. & Sgarra, C. (2024). Commodity Asian option pricing and simulation in a 4-factor model with jump clusters. *Annals of Operations Research*, 336, 275-306. <https://doi.org/10.1007/s10479-022-05152-x>
- [12] Brugger, S., & Ortíz, E. (2011). Mercados accionarios y su relación con la economía real en América Latina. *Problemas Del Desarrollo. Revista Latinoamericana de Economía*, 43(168). <http://dx.doi.org/10.22201/iiiec.20078951e.2012.168.28638>
- [13] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407. <https://doi.org/10.2307/1911242>
- [14] Cruz-Aké, S., R. S. García-Ruiz, & F. Venegas-Martínez (2021). Climate derivatives strategies as an alternative to set up guaranteed prices for agricultural producers in México. *Applied Economics Letters*, 30(3), 302-318, <https://doi.org/10.1080/13504851.2021.1985061>
- [15] Ewald, C.O., Wu, Y., Zhang, A. (2023). Pricing Asian options with stochastic convenience yield and jumps. *Quantitative Finance*. 23(4), 677-692. <https://doi.org/10.1080/14697688.2022.2160799>
- [16] Gan, L., Wang, H. & Yang, Z. (2020). Machine learning solutions to challenges in finance: An application to the pricing of financial products. *Technological Forecasting and Social Change*, 153, 119928. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2020.119928>
- [17] Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343. <http://www.jstor.org/stable/2962057>
- [18] Hull, J. & White, A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42(2), 281-300. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x>
- [19] Kahalé, N. (2020). General multilevel Monte Carlo methods for pricing discretely monitored Asian options. *European Journal of Operational Research*, 282 (2), 739-748. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.04.022>
- [20] Koh, W.S., Ahmad, R.R., Jaaman, S.H., Sulaiman, J. (2019). Pricing Asian Option by Solving Black-Scholes PDE Using Gauss-Seidel Method. In: Kor, LK., Ahmad, AR., Idrus, Z., Mansor, K.

- (eds) Proceedings of the Third International Conference on Computing, Mathematics and Statistics (iCMS2017). Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-7279-7_18
- [21] Larcher, G. (2022). Extensions of the Black-Scholes Theory to Other Types of Options (Futures Options, Currency Options, American Options, Path-Dependent Options, Multi-asset Options). In: The Art of Quantitative Finance Vol.2. Springer Texts in Business and Economics. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-23870-3_2
- [22] Overbeck, L. & Rydén, T. (1997). Estimation in the Cox-Ingersoll-Ross model, *Econometric Theory*, 13(3), 430-461. <https://doi.org/10.1017/S0266466600005880>
- [23] Pergamenchtchikov, S., & Shishkova, A. (2020). Hedging problems for Asian options with transactions costs. arXiv preprint arXiv:2001.01443. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.01443>
- [24] Pirjol, D., & Zhu, L. (2017). Asymptotics for the discrete-time average of the geometric Brownian motion and Asian options. *Advances in Applied Probability*, 49(2), 446-480. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.9>
- [25] Roul, P. (2022). A robust numerical technique and its analysis for computing the price of an Asian option. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 416, 114527. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114527>
- [26] Stojkoski, V., Sandev, T., Basnarkov, L., Kocarev, L., & Metzler, R. (2020). Generalised Geometric Brownian Motion: Theory and Applications to Option Pricing. *Entropy*, 22(12), 1432. <http://dx.doi.org/10.3390/e22121432>
- [27] Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre* (2da. edición). Mexico: Cengage.
- [28] World Economic Forum, *Ucrania: Cronología de un año de Guerra* (2023). Recuperado de: <https://es.weforum.org/agenda/2023/03/ucrania-cronologia-de-un-ano-de-guerra/>