

Valor en Riesgo mediante un modelo heterocedástico condicional α -estable.

Ramona Serrano Bautista*

Tecnológico de Monterrey, Guadalajara

Leovardo Mata Mata

Tecnológico de Monterrey, Estado de México

(Recibido 01 de septiembre 2016, aceptado 05 de abril 2017)

Resumen

El objetivo de esta investigación es describir y comparar la estimación del Valor en Riesgo (VaR), considerando un modelo GARCH univariado con la innovación de la distribución α -estable. Los resultados estadísticos sugieren que el modelo VaR α -estable proporciona estimaciones del VaR más precisas que el modelo bajo la hipótesis gaussiana, el cual subestima significativamente el VaR en períodos de alta volatilidad. Por el contrario, en el período posterior a la crisis, el VaR al 95% bajo la hipótesis gaussiana muestra resultados aceptables y el obtenido bajo el modelo α -estable se encuentra por debajo del rango admisible. La principal aportación de esta investigación es que propone una distribución condicional alternativa para los rendimientos de los precios de los activos en el mercado financiero mexicano, considerando un modelo GARCH con la innovación de la distribución α -estable. Por último, esta investigación proporciona evidencia de que el modelo VaR α -estable estima satisfactoriamente el VaR para niveles altos de confianza incluso en períodos de alta volatilidad. En contraste, en períodos de relativa tranquilidad para niveles de confianza bajos este modelo sobrestima las pérdidas potenciales.

Clasificación JEL: G17, C22, C13.

Palabras clave: Valor en Riesgo (VaR), Distribución estable, GARCH, Modelo heterocedástico condicional α -estable

Value at Risk using an α -Stable Conditional Heterocedastic Model

Abstract

The aim of this research is to describe and compare the estimation of Value at Risk (VaR), considering a univariate GARCH model with the innovation of the α -stable distribution. The statistical results suggest that the α -stable VaR model provides more accurate VaR estimations than the traditional Gaussian model, which significantly underestimates VaR in periods of high volatility. In contrast, in the post-crisis period, VaR at 95% under the Gaussian hypothesis shows acceptable results, and that obtained under the α -stable model is below the admissible range. The main contribution of this research is that it proposes an alternative conditional distribution for asset price yields in the Mexican financial market, considering a GARCH model with the innovation of the α -stable distribution. Finally, this research provides evidence that the α -stable VaR model satisfactorily estimates the VaR for high levels of confidence even in periods of high volatility. In contrast, in periods of relative financial tranquility for low confidence levels, this model overestimates potential losses.

JEL Classification: G17, C22, C13.

Key Words: Value at Risk (VaR), Stable Distribution, GARCH, α -Stable Conditional Heterocedastic Model.

* Tecnológico de Monterrey, Guadalajara Av. General Ramón Corona 2514 Nuevo México, 45201 Zapopan, Jal., México Tel. (33) 36693000. Correo electrónico: rsb@itesm.mx, ramserrano77@gmail.com

1. Introducción.

Durante las últimas décadas la teoría financiera se desarrolló bajo el supuesto de que las series de rendimientos siguen una distribución normal. La hipótesis Gaussiana no fue cuestionada seriamente hasta que los trabajos pioneros de Mandelbrot (1963) y Fama (1965a-b) fueron publicados. El exceso de curtosis encontrado en las investigaciones de Mandelbrot y Fama les llevó a rechazar la hipótesis normal y proponer la distribución Pareto estable como un modelo estadístico para los rendimientos de los activos.

En años posteriores, la hipótesis Pareto estable fue apoyada por numerosas investigaciones empíricas de diversos autores, tales como Bawa (1979); Janicki y Weron (1994); Panorska, Mittnik y Rachev (1995); y más recientemente Nolan (1997, 2003, 2013); Rachev y Mittnik (2000); Rachev y Han (2000); Ortobelli, Huber y Schwartz (2002); Curto, Pinto y Tavares (2009); Nolan y Ravishanker (2009); Contreras-Piedragil y Venegas-Martínez (2011); Bonato (2012); Climent-Hernández y Venegas-Martínez (2013) y Climent, Venegas y Ortiz (2015)).

El objetivo de este trabajo de investigación es considerar la familia de distribuciones α -estable en la estimación del VaR como una alternativa en el mercado financiero mexicano. Esta propuesta es atractiva, dado que la distribución estable no Gaussiana posee propiedades similares a la distribución normal. Entre estas propiedades, es importante resaltar que la familia de distribuciones α -estable satisface el Teorema del Límite Central Generalizado, el cual afirma que el único límite no trivial de sumas de variables aleatorias normalizadas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) es estable. La segunda propiedad señala que las distribuciones α -estable tienen dominio de atracción, es decir, cualquier distribución en el dominio de atracción de una distribución estable específica, tendrá propiedades similares a la misma. La tercera propiedad es que las distribuciones α -estable capturan la naturaleza leptocúrtica de los datos financieros empíricos (Fama (1965a); Mandelbrot (1963 y 1967); Cheng y Rachev (1995); McCulloch (1996); Mittnik, Rachev y Paolella (1997)).

Tal vez, el aspecto más atractivo de la hipótesis α -estable es la propiedad de estabilidad, es decir, las distribuciones α -estable son estables con respecto a la suma de variables aleatorias estables i.i.d. La propiedad de estabilidad es deseable, ya que implica que cada distribución estable tiene un índice de estabilidad que sigue siendo el mismo, independientemente de la escala utilizada. El índice de estabilidad desempeña el papel del parámetro que rige las propiedades principales de la distribución subyacente.

Este enfoque, se basa en la estimación de los parámetros de la distribución estable empleando el criterio de máxima verosimilitud. Además, la estimación de la media y varianza condicional de los rendimientos se basa en el modelo TSGARCH con la innovación de la distribución estable.

Por último, el objetivo final de esta investigación es comparar el desempeño de las estimaciones del VaR obtenidas bajo la hipótesis estable y gaussiana durante y después de la crisis financiera del 2008.

Existen numerosas investigaciones que realizan estimaciones del VaR con simulación Montecarlo en períodos de alta volatilidad empleando la metodología

econométrica ARMA-GARCH, sin embargo la principal aportación de esta investigación es que propone una distribución condicional alternativa para los rendimientos de los precios de los activos en el mercado financiero mexicano, considerando un modelo GARCH con la innovación de la distribución α -estable.

Además, hasta donde es de nuestro conocimiento no hay evidencia empírica sobre el desempeño en la medición de riesgo de los modelos VaR estable y normal, respectivamente, durante períodos de alta volatilidad en el mercado financiero mexicano. Este trabajo proporciona evidencia de que las estimaciones del VaR mediante el modelo heterocedástico condicional estable muestran una precisión satisfactoria durante períodos de turbulencias financieras.

El resto de la presente investigación se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta la definición del Valor en Riesgo y las metodologías tradicionales para el cálculo del mismo. En la sección 3 se hace una breve descripción de los modelos GARCH. En la sección 4 se describe la familia de distribuciones α -estable y sus principales características. En la sección 5 se describen los datos empleados y se discuten sus propiedades, además se presentan los resultados de la estimación de los modelos GARCH basados en la hipótesis estable y normal, respectivamente. La sección 6 presenta las estimaciones del VaR mediante el modelo heterocedástico condicional estable. En la sección 7 se analiza y compara la estimación del VaR α -estable con los resultados del VaR obtenidos bajo el supuesto de que los rendimientos financieros siguen una distribución Gaussiana. Por último, en la sección 8 se presentan las conclusiones, limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

2. Valor en Riesgo (VaR)

El Valor en Riesgo se ha convertido en el estándar para medir y evaluar el riesgo, desde que en 1996 el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea requiere que las instituciones financieras, como los bancos y firmas de inversión, cumplan con el requisito de capital basado en la estimación del Valor en Riesgo (VaR).

El Valor en Riesgo se define como la máxima pérdida probable de un portafolio o instrumento financiero en un horizonte temporal determinado, para un nivel de confianza dado, bajo circunstancias normales de los mercados y como consecuencia de movimientos adversos de los precios. Sin embargo, el objetivo de esta sección es definir formalmente el VaR y mostrar algunas de las expresiones analíticas utilizadas en el cálculo del mismo.

Definición. *Dado un intervalo de tiempo $[t, T]$, el cambio relativo en el valor de un activo financiero en un horizonte de tiempo dado $\tau = T - t$ se define como*

$$\Delta\Pi_t(\tau) := \Pi(t + \tau) - \Pi(t) \tag{1}$$

donde $\Pi(t) = \ln V(t)$, $V(t)$ representa el valor del activo financiero en el tiempo t . Por simplicidad denotamos $X = \Delta\Pi_t(\tau)$, entonces con $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ es una variable aleatoria continua definida sobre el espacio muestral Ω que representa el cambio en el valor del activo (rendimiento). Supongamos que X está definida sobre un espacio de probabilidad fijo (Ω, \mathbf{A}, P) . (Entonces, el Valor en Riesgo de X al nivel $1 - q$ se define como la mínima

de las cotas superiores para un intervalo de confianza del $(1 - q)\%$ tal que

$$P \{X \leq -VaR_{1-q}^X\} = q \quad (2)$$

Es decir

$$VaR_{1-q}^X = -\sup \{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \leq q\} \quad (3)$$

De lo cual se deriva lo siguiente

$$VaR_{1-q}^X = -\inf \{x \in \mathbb{R} : P(X > x) \leq 1 - q\} \quad (4)$$

De la definición de VaR en (2), es posible obtener el VaR dada la función de distribución acumulada de los rendimientos del activo financiero:

$$q = F_X(-VaR_{1-q}^X) = \int_{-\infty}^{-VaR_{1-q}^X} f_X(x) dx \quad (5)$$

Donde $F_X(x) = P(X \leq x)$ es la función de distribución acumulada de los rendimientos del activo en un período y $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X . Entonces

$$-VaR_{1-q}^X = F_X^{-1}(q)$$

es decir el VaR es el cuantil q de F_x . Por lo cual, la esencia de los cálculos del VaR es la estimación de los cuantiles inferiores de la función de distribución acumulada de los rendimientos del activo financiero, que en la práctica es desconocida.

Los métodos de estimación del VaR sugieren diferentes formas de construir esta función. Los más comunes son, el método paramétrico, la simulación histórica y la simulación Monte Carlo.

2.1 Cálculo del VaR por Simulación Montecarlo

A través de este método, se obtiene una aproximación del comportamiento del rendimiento esperado de un portafolio o instrumento financiero, mediante simulaciones que generan trayectorias aleatorias de los rendimientos del portafolio o instrumento financiero, considerándose ciertos supuestos iniciales sobre las volatilidades y correlaciones de los factores de riesgo.

2.2 Cálculo del VaR paramétrico

El Método paramétrico se utiliza bajo el supuesto de que los datos observados siguen algunas reglas o modelos con parámetros desconocidos. Los datos se utilizan para obtener las estimaciones de los parámetros y enseguida se aplica la regla o el modelo establecido para calcular el VaR. En el método paramétrico se utilizan dos tipos enfoques: el enfoque incondicional y el enfoque condicional.

2.2.1 Enfoque incondicional

Se basa en el supuesto de que los rendimientos financieros para cada período de tiempo son variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas (i.i.d.) que siguen una distribución normal multivariada. Sin embargo diversas investigaciones muestran que la distribución empírica de los datos financieros tiene algunas propiedades que no pueden ser explicadas por la distribución

Gaussiana multivariada. Por ejemplo Fama (1965b), Hull y White (1998) señalan que los cambios en varias variables de mercado (precios de las acciones, precios de los bonos cupón cero, tipos de cambio, precios de las materias primas, etc.) son leptocúrticos, es decir, hay demasiados valores cercanos a la media y demasiados en las colas extremas, lo cual aumenta la probabilidad de movimientos muy grandes y muy pequeños en el valor de las variables de mercado y disminuye la probabilidad de movimientos moderados. Por lo tanto, la hipótesis Gaussiana se cuestiona y se sugieren algunas familias de distribuciones alternativas.

Entre estas se encuentra la distribución t Generalizada Asimétrica (GST) introducida en Theodossiou (1998), la cual es una extensión de la distribución t -Student que permite asimetría. Otra es la familia de distribuciones α -estables, propuesta por Mandelbrot (1963), la cual es una generalización de la distribución Gaussiana que permite asimetría y colas pesadas.

Khindanova, Rachev y Schwartz (2001) analizan el uso de la distribución Pareto Estable en el cálculo del VaR y afirman que esta distribución posee un ajuste superior en la estimación del mismo. En la presente investigación se utiliza la distribución Pareto Estable en el cálculo del VaR, pero a diferencia de Khindanova se considera la volatilidad variable en el tiempo.

Por otro lado, en el mundo real, las series financieras no son independientes entre sí, por lo que el supuesto de que las variables aleatorias son idéntica e independientemente distribuidas es cuestionado.

2.2.2 Enfoque condicional.

Admite que las series de tiempo de los rendimientos financieros dependen de la información pasada. Tradicionalmente, la dependencia de la serie se describe por un modelo de media móvil autorregresivo (ARMA), con lo cual se obtiene una serie estacionaria. Sin embargo, los modelos ARMA asumen que la varianza es constante, y dado que en general la volatilidad de las series de tiempo financieras no es constante, estos modelos no son adecuados para modelarlas.

Diversas investigaciones tratan de encontrar modelos que describan la volatilidad variable en el tiempo, característica común de los rendimientos financieros. El más popular es el modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH) propuesto por Engle (1982) en el cual la varianza condicionada a la información pasada no es constante, y depende del cuadrado de las innovaciones pasadas. Posteriormente Bollerslev (1986) generaliza los modelos ARCH al proponer los modelos de Heterocedasticidad Condicional Generalizada Autorregresiva (GARCH en los cuales la varianza condicional depende no solo de los cuadrados de las perturbaciones, como en Engle, sino además, de las varianzas condicionales de períodos anteriores. Es posible combinar ambos modelos con el modelo ARMA, obteniendo los modelos ARMA-ARCH y ARMA-GARCH.

Hoy en día, el modelo GARCH se utiliza ampliamente. En el modelo GARCH estándar, se supone que la distribución de la innovación es gaussiana. Sin embargo, para muchas series de rendimientos financieros, la distribución Gaussiana no es adecuada dado que no considera la leptocurtosis. Por lo tanto, se utilizan varias distribuciones no gaussianas, por ejemplo la distribución GST (Bali y Theodossiou 2007 y Hansen 1994), la distribución Pareto estable (Liu

y Brorsen 1995; Panorska, Mittnik y Rachev 1995). Estos modelos de series de tiempo se introducirán en la siguiente sección.

3. Modelos de volatilidad

Entre los modelos populares que explican la volatilidad variable se encuentran los modelos de la familia ARCH (Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) introducidos por Engle (1982), los cuales asumen que las varianzas condicionales siguen procesos autorregresivos. El modelo ARCH (m) supone que los rendimientos de los activos son descritos por el siguiente proceso:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned}$$

donde μ_t es la media condicional de los rendimientos, ε_t es el proceso de innovación, z_t son variables aleatorias i.i.d. con media 0 y varianza 1, σ_t^2 es la varianza condicional de la innovación r_t , $a_0 > 0$, y $a_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ para garantizar que la varianza sea positiva. Además los coeficientes deben satisfacer $\sum_{i=1}^m a_i < 1$ para que el proceso σ_t^2 sea estacionario. Tradicionalmente, z_t sigue una distribución normal estándar, pero es posible utilizar otras distribuciones.

Bollerslev (1986) propuso el modelo ARCH generalizado o GARCH. El modelo Autorregresivo con Heterocedasticidad Condicional Generalizado (GARCH) es una extensión del modelo ARCH, el cual permite que la varianza actual del término del error dependa también de las varianzas de errores previos. El modelo $GARCH(m,s)$ se escribe como

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s b_i \sigma_{t-i}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

donde a_0 y $a_i, i = 1, \dots, m$ son las mismas del modelo ARCH, y $b_i \geq 0, i = 1, \dots, s$ son los coeficientes de la especificación. Además $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (a_i + b_i) < 1$, para $i > m, a_i = 0, i > s, b_i = 0$. Esto es un requisito para garantizar que la varianza sea positiva y que existan los momentos de orden superior.

De (7) se obtiene que la varianza marginal de r_t es finita, mientras que su varianza condicional σ_t^2 varía en el tiempo.

Por otra parte, vale la pena señalar que existen estudios empíricos que afirman que el modelo $GARCH(1,1)$ es robusto para los datos financieros (véase Bali y Theodossiou 2007, Hansen 1994, Liu y Brorsen 1995 y Panorska, Mittnik y Rachev 1995). Entonces, dados los datos financieros, se pueden estimar los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud.

4. Distribución α -estable

En la gestión del riesgo es esencial encontrar una distribución que describa los datos financieros de una manera adecuada. Comúnmente los rendimientos financieros no se describen adecuadamente por la distribución normal, ya que los resultados empíricos muestran que los datos financieros son por lo general asimétricos y presentan colas pesadas. Sin embargo, actualmente se emplean otras familias paramétricas que describen datos cuya característica es la presencia de colas pesadas.

Entre estas se encuentra la familia de distribuciones α -estables, la cual es una clase rica de distribuciones de probabilidad que permiten asimetría y colas pesadas y además tienen muchas propiedades matemáticas interesantes. Esta clase de distribuciones fue caracterizada por Paul Lévy en su estudio de sumas de términos independientes idénticamente distribuidos en 1920. La ausencia de expresiones analíticas explícitas (fórmulas cerradas) para la función de densidad de probabilidad y para la función de distribución acumulada de las distribuciones estables (excepto las distribuciones de Gauss, Cauchy y Levy), ha sido un gran inconveniente para su implementación. En la actualidad existen programas informáticos confiables para calcular las funciones de densidad estables, las funciones de distribución y sus cuantiles.

Existen múltiples definiciones y notaciones de variables aleatorias estables.¹ En este documento, seguimos la notación y definición presentada por Nolan, la cual caracteriza a las distribuciones estables por cuatro parámetros, presentados a continuación.

Definición. Una variable aleatoria X es estable si, para cualquier $a > 0$ y $b > 0$, existe una constante $c > 0$ y $d \in R$ tal que

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d$$

donde X_1 y X_2 son copias independientes de X y $\stackrel{d}{=}$ denota igualdad en distribución. Una variable aleatoria es estrictamente estable si

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX$$

Una variable aleatoria es simétrica estable si es estable y simétricamente distribuida alrededor del 0, es decir

$$X \stackrel{d}{=} -X$$

En general, las distribuciones estables no poseen expresiones analíticas explícitas para la función de densidad de probabilidad (PDF) ni para la función de distribución acumulada (CDF). Una variable aleatoria α -estable X , es comúnmente descrita por su función característica (CF), la cual se define como

$$\begin{aligned} \Phi_X(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta) &= E[\exp(iXt)] \\ E[\exp(iXt)] &= \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\delta t), & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln |t|) + i\delta t), & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

¹ Una variable aleatoria estable se llama α -estable o Pareto estable o Pareto-Lévy-estable cuando $\alpha < 2$.

donde

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$0 < \alpha \leq 2$ es el índice de estabilidad o exponente característico que nos refleja el tamaño de las colas de la distribución, $-1 \leq \beta \leq 1$ es el parámetro de asimetría que nos indica la simetría de la distribución, $\gamma \geq 0$ es un parámetro de escala también denominado dispersión, y $\delta \in R$ es el parámetro de posición.

Esta parametrización es conveniente para propósitos teóricos, pero no para cálculos numéricos o inferencia estadística, y además no es continua en la vecindad de $\alpha = 1$ Nolan (1997) llama a la expresión (8) la 1-parametrización y la denota como $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$.

Además, para $\gamma = 1, \delta = 0$ y $\alpha \neq 1$ la función característica es

$$\Phi_X(t) = \exp\left(-|t|^\alpha + i\beta t|t|^{\alpha-1} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)$$

Otra expresión más simple para la función característica de una variable aleatoria α -estable X que es continua para todos los parámetros es

$$E[\exp(iXt)] = \begin{cases} \exp\left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left(|\gamma t|^{1-\alpha} - 1\right)\right] + i\delta t\right), \\ \quad \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\gamma |t| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln(\gamma |t|)\right] + i\delta t\right), \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

la cual es llamada por Nolan (1997) la 0-parametrización y la denota como $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$. Si $\beta = 0$ la 0-parametrización y 1-parametrización son iguales. Si $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$, entonces una variable aleatoria α -estable estándar $Z \sim S(\alpha, \beta, 1, 0; 0)$, se define como

$$Z = \frac{X - \delta}{\gamma}$$

Con función de densidad de probabilidad $f(x; \alpha, \beta, 1, 0; 0)$. Por lo cual, la función de densidad de probabilidad para X , $f(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$, puede expresarse en términos de la función de densidad de probabilidad de la variable estándar α -estable como

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{\gamma} f\left(\frac{x - \delta}{\gamma}; \alpha, \beta, 1, 0; 0\right)$$

Lo cual no se cumple para la parametrización $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ cuando $\alpha = 1$. En esta investigación se usarán la 0-parametrización y 1-parametrización, debido a que $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ posee propiedades algebraicas deseables y $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ es continua en todos sus parámetros, lo cual es útil en el trabajo numérico e inferencia estadística. En estas dos parametrizaciones, α, β y el

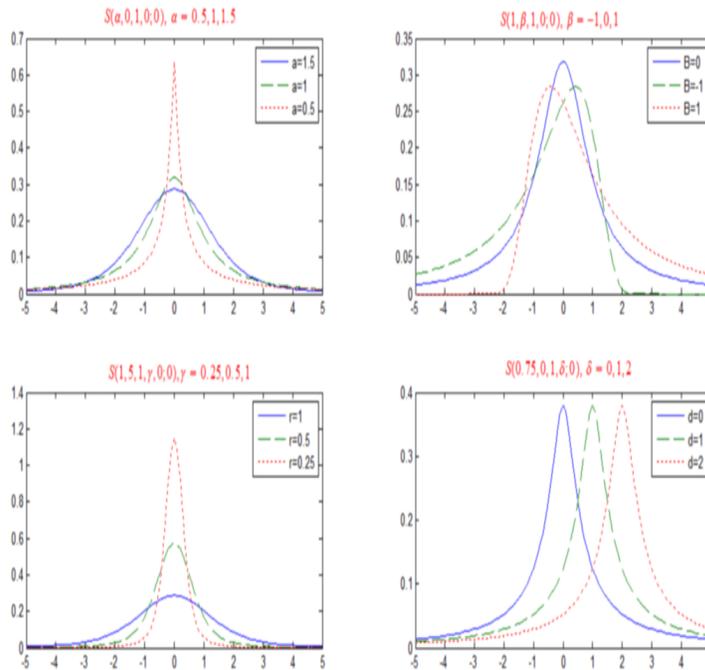
parámetro de escala γ son siempre los mismos, pero el parámetro de localización δ tiene diferentes valores.

En lo sucesivo denotaremos $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ como $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0)$ y $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ como $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1)$. En este caso los parámetros de localización están relacionados por

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \beta\frac{2}{\pi}\gamma \ln \gamma \alpha = 1 \end{cases} ; \delta_1 = \begin{cases} \delta_0 - \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} \alpha \neq 1 \\ \delta_0 - \beta\frac{2}{\pi}\gamma \ln \gamma \alpha = 1 \end{cases}$$

En estudios empíricos, el modelado de datos financieros se realiza normalmente mediante distribuciones estables con $1 < \alpha < 2$, las cuales corresponden a la familia de **distribuciones Pareto-Estable** (PE). A valores pequeños de α le corresponden distribuciones más leptocúrticas (el pico de la densidad se hace mayor y las colas son más pesadas). Por lo tanto, el índice de estabilidad α puede ser interpretado como una medida de curtosis. Si el parámetro de asimetría $\beta = 0$, la distribución de X es simétrica, si $\beta > 0$, la distribución está sesgada hacia la derecha y si $\beta < 0$, la distribución es sesgada a la izquierda. Cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 0$, $S(2, 0, 1, 0; 0)$ se reduce a la distribución Gaussiana. Cuando $\alpha < 2$, $S(\alpha, 0, 1, 0; 0)$ se tienen colas más pesadas que en la distribución Gaussiana.

Figura 1. Densidad Estables $(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$



Fuente: Elaboración propia.

Dado que las distribuciones estables no poseen expresiones analíticas explícitas para la función de densidad de probabilidad ni para la función de distribución acumulada (excepto cuando $\alpha = 2$, estas se calculan numéricamente. Uno de los enfoques para aproximar la función de densidad de probabilidad es aplicando Transformada Rápida de Fourier (FFT) a la función característica (ver Khindanova, Rachev, Schwartz (2001)).

Para resumir brevemente la aproximación basada en la FFT, recordemos que la PDF se puede escribir en términos de la CF como

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \Phi_X(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta) dt \quad (10)$$

La integral (10) se puede calcular utilizando N puntos igualmente espaciados a una distancia h , tal que $x_k = (k - 1 - N/2) h, k = 1, \dots, N$. Tomando $t = 2\pi\omega$, la ecuación (10) implica

$$f((k - 1 - N/2) h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega(k-1-N/2)h} \Phi_X(2\pi\omega) d\omega$$

La integración se puede aproximar mediante

$$\begin{aligned} f\left(\left(k - 1 - \frac{N}{2}\right) h\right) &\approx s \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_X\left(2\pi s\left(n - 1 - \frac{N}{2}\right)\right)}{e^{-i2\pi(n-1-N/2)(k-1-N/2)hs}} \\ &= s(-1)^{k-1-N/2} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} \Phi_X\left(2\pi s\left(n - 1 - \frac{N}{2}\right)\right)}{e^{-i2\pi(n-1)(k-1)/N}} \end{aligned}$$

donde $s = (hN)^{-1}$. La sumatoria en (11) puede ser calculada de manera eficiente aplicando la FFT a la sucesión

$$(-1)^{n-1} \Phi_X\left(2\pi s\left(n - 1 - \frac{N}{2}\right)\right), n = 1, \dots, N$$

Normalizando el k -ésimo elemento de la sucesión por $s(-1)^{k-1-N/2}$, se obtiene el valor aproximado de la PDF para cada punto de la cuadrícula y para cualquier x , se puede utilizar la interpolación lineal con el fin de obtener su PDF.

5. Selección de los datos y estimación de los modelos GARCH

5.1 Descripción de los datos

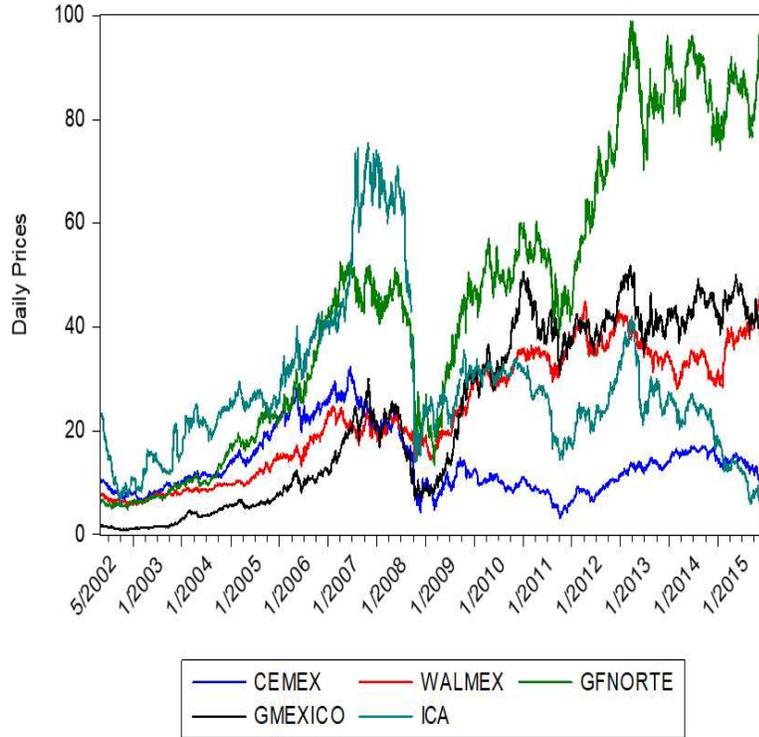
En esta investigación, se han elegido 5 activos que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), pertenecientes a 5 diferentes industrias. Estos activos corresponden a las siguientes empresas: Grupo Financiero Banorte, S.A.B DE C.V., serie O (GFNORTE) uno de los grupos financieros mexicanos más grandes, importantes y sin fusiones con la banca extranjera, cuyo porcentaje de participación en el IPC es del 7.73%; Cemex, S.A.B. DE C.V., serie CPO (CEMEX) compañía global de soluciones para la industria de la construcción, que ofrece productos y servicio a clientes y comunidades en más de 50 países en el mundo cuyo porcentaje de participación en el IPC es del 7.22 %; Empresas ICA, S.A.B. DE C.V., (ICA) empresa de ingeniería, procuración y construcción más grande de México dedicada a la construcción pesada, industrial o urbano así como a diversas obras de ingeniería y servicios; Grupo México, S.A.B. DE C.V., serie B (GMEXICO) es uno de los principales productores de cobre en el mundo y además, cuenta con el servicio ferroviario de carga multimodal más grande de México, y con una división de infraestructura con gran potencial de crecimiento cuyo porcentaje de participación en el IPC es de 6.61%; y Wal-Mart de México, S.A. DE C.V., (WALMEX) empresa cuyo porcentaje de participación en el IPC es del 8.19%.

La moneda de referencia a utilizar es el peso mexicano, ya que es la moneda de cotización de las empresas. Las cinco series que conforman la canasta que se ha elegido contienen información de los precios diarios de cierre de cada activo, excluyendo fines de semana y festivos.

La muestra total inicia el 3 de enero del 2002 y finaliza el 31 de diciembre del 2015, por lo cual se tienen 3526 observaciones, para cada uno de los activos. La muestra total se divide en dos períodos, esto con la finalidad de evaluar el desempeño de la estimación del modelo VaR *alpha*-estable durante y después de períodos de alta volatilidad, como la crisis financiera del 2008. El primer período inicia el 3 de enero del 2002 y finaliza el 31 de diciembre del 2009 y el segundo comprende el período del 4 de enero del 2010 al 31 de diciembre del 2015. Por tanto, el total de observaciones para cada serie correspondientes a cada período son 2017 y 1509 respectivamente.

La Figura 2 muestra la gráfica del comportamiento de los precios diarios de cierre de los activos. Cabe señalar que los gráficos y tablas que se exponen en este capítulo son de elaboración propia a partir de las cotizaciones oficiales.

Figura 2. Precios diarios de cierre.



Fuente: Elaboración propia.

Sea R_t la tasa de rendimiento diario de la acción en el día t y P_t el valor de la acción en el día t . Bajo el supuesto de que la tasa de rendimiento es continua, entonces

$$P_t = P_{t-1}e^{R_t}$$

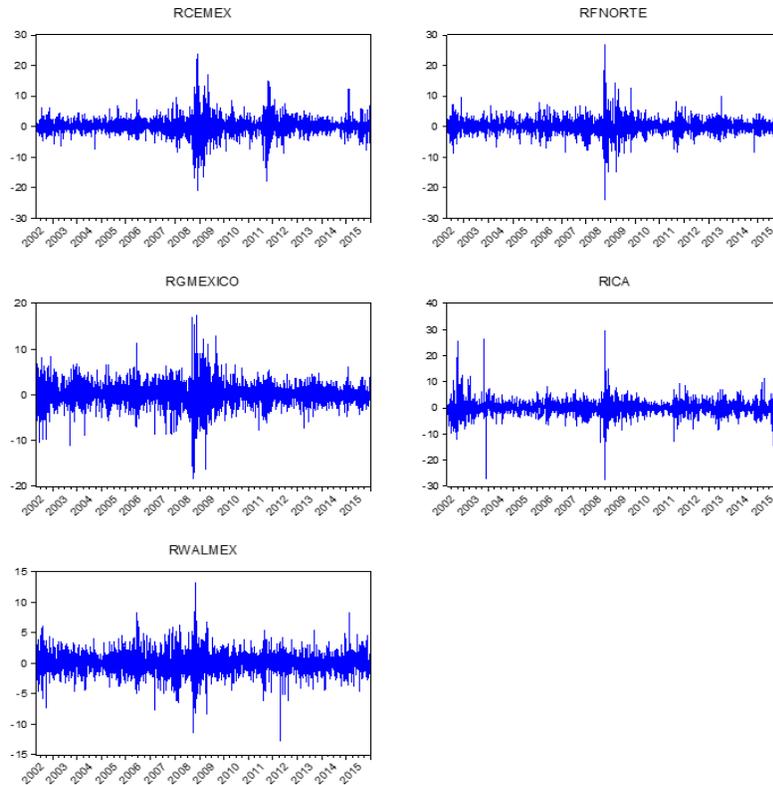
Por lo cual, la tasa de rendimiento diario de la acción se obtiene aplicando logaritmo a la serie de precios de las acciones

$$R_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

dato que la tasa de rendimientos diarios es muy pequeña, consideramos el porcentaje, es decir

$$R_t = 100 \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Figura 3. Rendimientos Diarios Porcentuales



Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 1 se presentan los estadísticos de los rendimientos para la muestra total y los dos períodos, además, mediante el estadístico Jarque-Bera² se contrasta la normalidad de los mismos.

² Jarque-Bera, $JB = n[(S^2/6) + (K - 3)^2/24]$, es una prueba estadística que se aplica para comprobar si los rendimientos se distribuyen normalmente, donde n denota el número de observaciones, S es la asimetría y K es la curtosis. El estadístico JB está distribuido como una Chi-cuadrado con dos grados de libertad.

Tabla 1. Estadística descriptiva de los rendimientos.

Serie	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Sector	Materiales	Financiero	Minero	Industrial	Consumo Básico
Periodo 2002-2015					
Media	0.0207	0.0840	0.0399	0.0160	0.0498
Varianza	4.7602	5.5260	8.5836	6.2503	3.3197
Asimetría	0.0497	0.0961	-0.8059	0.3374	-0.0230
Curtosis	22.0171	16.2460	14.5645	26.5369	5.7584
Jarque-Bera	53134.02	25783.00	20029.75	81456.49	1118.161
Probabilidad (JB)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Periodo 2002-2009					
Media	0.0222	0.1131	0.1760	0.0098	0.0764
Varianza	7.6737	7.2571	8.8497	9.3049	3.4883
Asimetría	0.0503	0.0832	-0.1803	0.3659	0.0508
Curtosis	14.7608	15.7323	7.52237	20.6039	6.7125
Jarque-Bera	11625.27	13626.49	1729.735	26089.19	1159.199
Probabilidad (JB)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Periodo 2010-2015					
Media	0.0187	0.0452	-0.1421	0.0243	0.0142
Varianza	0.8683	3.2128	8.1757	2.1707	3.0942
Asimetría	-0.3246	0.0472	-1.7710	-0.4317	-0.1488
Curtosis	5.8428	5.0329	25.3131	8.3565	4.0706
Jarque-Bera	534.61	260.39	32092.54	1850.86	77.6382
Probabilidad (JB)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 1 se observa que tanto como para la muestra completa como para los dos períodos el sesgo de los datos es diferente de cero, es decir los datos son asimétricos. Por otro lado, la curtosis es mayor a 3, lo cual sugiere que los datos presentan colas pesadas. Además, el estadístico Jarque-Bera es también muy grande y estadísticamente significativo, por lo cual la hipótesis de normalidad se rechaza. Por lo tanto, la distribución Gaussiana no es una buena opción para modelar los datos. Por último, se observa que en el período 2002-2009 existe un aumento significativo de la volatilidad.

Dado que las series de rendimientos no son idéntica e independientemente distribuidas a pesar de que muestran poca correlación serial, un modelo ARMA por sí solo no las describiría adecuadamente, por lo cual, se emplea un modelo ARMA-GARCH. Para determinar el orden del modelo ARMA se analiza la función de autocorrelación parcial muestral, dado que las series de rendimientos muestran poca correlación serial, el componente ARMA es innecesario, es decir, elegimos $p = q = 0$. Para el modelo GARCH con el objetivo de evitar carga computacional se utiliza el modelo más simple ($m = S = 1$) con una media, constante, distinta de cero.

Dado que el estadístico Jarque-Bera permite rechazar la hipótesis de normalidad, la distribución Gaussiana no es una buena opción para modelar los datos. En esta investigación, se considera la distribución estable, la cual describe tanto la asimetría como la curtosis de los datos.

6. Modelo Heterocedástico condicional α -estable

Como se observa en la Tabla 1 y la Figura 3, las series de rendimientos muestran no sólo asimetría y colas pesadas, sino también clúster de volatilidad variable en el tiempo. Por lo tanto, para describir tanto la asimetría como las colas pesadas se emplea la distribución α -estable para calcular la innovación en el modelo GARCH.

Por otro lado, como consecuencia de las colas pesadas, no todos los momentos están definidos en la distribución α -estable, excepto cuando $\alpha=2$, por lo cual se utiliza el TS-GARCH (especificación propuesta por Taylor (1986) y Schwert (1989)). El modelo se describe a continuación.

Los rendimientos de las acciones se modelan como

$$\begin{aligned} R_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ |\sigma_t| &= a_0 + a_1 |\varepsilon_{t-1}| + b_1 |\sigma_{t-1}| \end{aligned} \tag{12}$$

donde R_t es la serie de rendimientos de la acción en el tiempo t , μ_t y σ_t son la media condicional y la desviación estándar condicional de R_t , y z_t son variables aleatorias estandarizadas Pareto estables idéntica e independientemente distribuidas, que pueden denotarse como $z_t \sim S(\alpha, \beta, 1, 0; 0)$ $1 < \alpha < 2$.

Para comparar la bondad de ajuste de la distribución α -estable, se consideran dos pruebas de hipótesis: la prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) y la prueba de Anderson-Darling (AD). La hipótesis nula de ambas pruebas es H_0 : Los datos analizados siguen una distribución α -estable.

El test KS calcula el estadístico de contraste:

$$D = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - \hat{F}(x)|$$

donde $F(\cdot)$ es la frecuencia acumulada teórica y $\hat{F}(\cdot)$ es la frecuencia acumulada observada. Es decir, D es la mayor diferencia absoluta observada entre la frecuencia acumulada observada y la frecuencia acumulada teórica, obtenida a partir de la distribución de probabilidad que se especifica como hipótesis nula.

Si los valores observados $\hat{F}(\cdot)$ son similares a los esperados $F(x)$, el valor de D será pequeño. Cuanto mayor sea la discrepancia entre la distribución empírica y la distribución teórica, mayor será el valor de D . La toma de la decisión en el contraste anterior puede llevarse a cabo mediante el empleo del p-value asociado al estadístico D observado.

En el caso de la prueba AD el estadístico de prueba se define como $A^2 = -N - S$, donde N es el tamaño de muestra,

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{(2i-1)}{N} [\ln(F(Y_i)) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))]$$

$F(x)$ es la función de distribución acumulada según H_0 y Y_i es el i -ésimo estadístico de orden en la muestra de datos. A diferencia de la prueba KS, los valores críticos de la prueba AD dependen de la distribución supuesta en

la hipótesis nula, esto tiene la ventaja de ser más robusta para evaluar el comportamiento de las colas de la distribución, Marsaglia (2004).

De esta forma, para un nivel de significancia α , la regla de decisión para este contraste es:

$$\text{Si } p\text{-value} \geq \alpha \Rightarrow \text{No rechazar } H_0$$

$$\text{Si } p\text{-value} < \alpha \Rightarrow \text{Rechazar } H_0$$

La Tabla 2 muestra los valores observados de D , A^2 y el p -value para la muestra completa y los dos períodos.

Además, la estimación del test de Razón de Verosimilitud (LR) favorece el modelo estable. El test LR se define como

$$LR_{N,E} = -2 (\text{Loglik}_{normal} - \text{Loglik}_{estable})$$

En el cual la hipótesis nula es H_1 : Los datos siguen una distribución normal vs H_1 : Los datos siguen una distribución estable. En la Tabla 2 se muestran los valores del test LR, los cuales exceden el valor crítico (al 99% de confianza) de la distribución Ji-cuadrada con dos grados de libertad. Esto significa un claro rechazo de la hipótesis Gaussiana.

Tabla 2. Pruebas de bondad de ajuste.

Series	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
<i>D</i>	0.0147	0.0195	0.0183	0.0174	0.0181
<i>p-value</i>	0.4259	0.1365	0.1877	0.2338	0.1986
A^2	1.8582	1.7761	1.9649	1.5025	1.8341
<i>p-value</i>	0.1032	0.1216	0.1001	0.1727	0.1167
<i>LR</i>	143.4259	160.4371	87.4576	555.0117	172.4115
Periodo 2002-2009					
<i>D</i>	0.0155	0.0278	0.0213	0.0263	0.0188
<i>p-value</i>	0.7174	0.0875	0.3147	0.1218	0.4726
A^2	1.5243	1.9868	1.8953	1.690	1.7311
<i>p-value</i>	0.1708	0.1009	0.1137	0.1198	0.1247
<i>LR</i>	66.3914	113.9657	47.9006	325.0967	42.6780
Periodo 2010-2015					
<i>D</i>	0.0167	0.0142	0.0175	0.0155	0.0193
<i>p-value</i>	0.7892	0.9204	0.7403	0.8611	0.6266
A^2	1.6921	1.8988	1.8064	1.9521	1.8998
<i>p-value</i>	0.1203	0.1178	0.1177	0.1097	0.1165
<i>LR</i>	79.2385	38.1091	25.9290	189.9940	121.0522

Fuente: Elaboración propia.

Para estimar los parámetros en (12), se utiliza el método de máxima verosimilitud (MLE),³ donde la función de densidad de probabilidad de z_t se aproximó mediante el programa STABLE.⁴ Los parámetros estimados de la distribución α -estable para la muestra completa y los dos períodos se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. Parámetros de la distribución α -estable.

Serie	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
α	1.7915	1.8192	1.8811	1.7612	1.8348
β	-0.0000	0.1108	-0.1428	-0.0000	-0.0896
γ	0.6294	0.6305	0.6619	0.5831	0.6346
δ	-0.0014	-0.0170	0.0117	0.0101	0.0067
Periodo 2002-2009					
α	1.8314	1.7556	1.8686	1.7712	1.8678
β	0.0939	0.0722	-0.0000	0.0000	0.0000
γ	0.6413	0.6069	0.6579	0.5781	0.6542
δ	-0.0079	-0.0094	0.0090	0.0010	-0.0058
Periodo 2010-2015					
α	1.7612	1.9255	1.9115	1.7380	1.8129
β	-0.1042	0.4094	-0.5097	-0.0957	-0.1642
γ	0.6165	0.6708	0.6726	0.5979	0.6171
δ	0.0087	-0.0268	0.0351	0.0389	0.0256

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4 muestra las estimaciones obtenidas por el método de máxima verosimilitud para el modelo TS-GARCH, basado en la distribución α -estable, tanto para la muestra completa como en los dos períodos descritos anteriormente.

³ Las rutinas algebraicas requeridas en esta investigación fueron programadas en MATLAB R2013a.

⁴ El programa STABLE se describe en Nolan (1997).

Tabla 4. Parámetros del modelo TS-GARCH(1,1) con hipótesis α -estable (errores estándar están en paréntesis).

Series	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
a_0	0.0433 (0.001823)	0.0722 (0.008214)	0.0439 (0.003792)	0.0862 (0.003805)	0.0475 (0.007496)
a_1	0.0846 (0.004608)	0.1235 (0.005897)	0.0841 (0.004886)	0.1208 (0.004776)	0.0759 (0.006578)
b_1	0.9154 (0.003722)	0.8731 (0.006857)	0.9159 (0.003823)	0.8792 (0.004267)	0.9142 (0.008189)
Periodo 2002-2009					
a_0	0.0418 (0.005232)	0.1041 (0.015910)	0.0629 (0.010051)	0.2684 (0.016074)	0.0343 (0.007693)
a_1	0.0848 (0.006850)	0.1409 (0.009336)	0.0990 (0.008893)	0.2095 (0.008452)	0.0802 (0.008067)
b_1	0.9152 (0.006522)	0.8522 (0.012198)	0.9010 (0.008867)	0.7521 (0.009790)	0.9198 (0.008768)
Periodo 2010-2015					
a_0	0.0439 (0.006216)	0.0677 (0.011246)	0.0553 (0.003760)	0.0536 (0.036359)	0.9461 (0.075880)
a_1	0.0829 (0.008406)	0.1017 (0.011084)	0.0609 (0.006455)	0.0920 (0.015397)	0.1787 (0.007796)
b_1	0.9171 (0.011150)	0.8823 (0.009366)	0.9206 (0.004277)	0.9080 (0.032953)	0.2207 (0.024740)

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 4 muestra las gráficas de las funciones de densidad estables ajustadas a los datos correspondientes a la muestra completa con los parámetros estimados.

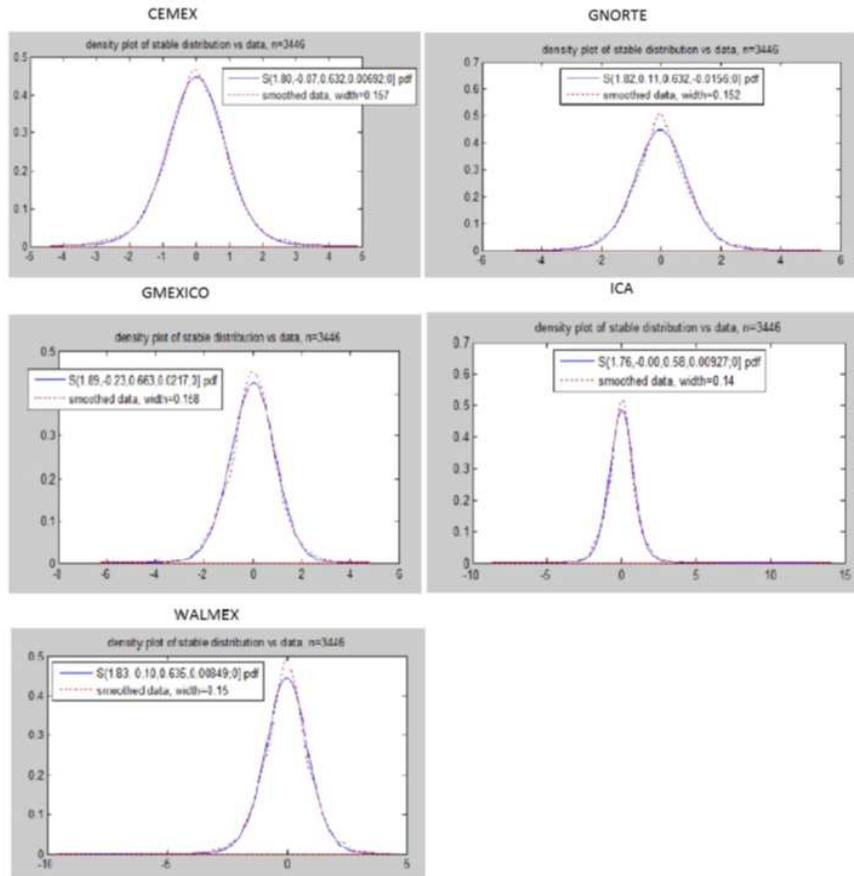
6.1 Modelo Heterocedástico condicional normal

Los rendimientos de las acciones se modelan como como

$$\begin{aligned}
 R_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\
 \sigma_t^2 &= a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

La Tabla 5 muestra las estimaciones obtenidas por el método de máxima verosimilitud para el modelo GARCH, basado en la distribución Normal, tanto para la muestra completa como para los dos periodos.

Figura 4. Funciones de densidad estables ajustadas a las series de datos



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Parámetros del modelo GARCH(1,1) con hipótesis normal (errores estándar están en paréntesis).

Series	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
a_0	0.0617 (0.00924872)	0.1385 (0.017730)	0.0728 (0.0127755)	0.0710 (0.00740924)	0.0810 (0.0113105)
a_1	0.0767 (0.00533699)	0.1123 (0.00718923)	0.0727 (0.00629053)	0.0908 (0.00442899)	0.0609 (0.00610394)
b_1	0.9133 (0.00562217)	0.8604 (0.00823736)	0.9149 (0.00745096)	0.9092 (0.00309637)	0.9104 (0.0085109)
Periodo 2002-2009					
a_0	0.0783 (0.0129735)	0.2275 (0.0370843)	0.1396 (0.0275856)	0.2067 (0.0165732)	0.0661 (0.0141218)
a_1	0.0823 (0.00846186)	0.1346 (0.0116431)	0.0886 (0.00955057)	0.1087 (0.00783608)	0.0709 (0.00809405)
b_1	0.9030 (0.00857277)	0.8304 (0.0144463)	0.8954 (0.01072)	0.8737 (0.00629455)	0.9099 (0.00953091)
Periodo 2010-2015					
a_0	0.0375 (0.0114183)	0.0836 (0.0162941)	0.0774 (0.0306987)	0.0288 (0.00803553)	1.5437 (0.214255)
a_1	0.0711 (0.0067722)	0.0797 (0.0100462)	0.0516 (0.0111052)	0.0715 (0.00602741)	0.1842 (0.029656)
b_1	0.9253 (0.00678081)	0.8948 (0.00981304)	0.9229 (0.0193198)	0.9285 (0.00451655)	0.1185 (0.109627)

Fuente: Elaboración propia.

6.2 Estimaciones del VaR

En esta sección se estima el VaR mediante un modelo heterocedástico condicional que asume que los rendimientos siguen: 1) una distribución estable, y 2) una distribución normal. El VaR se calcula considerando el horizonte de tiempo de un día ($\tau = 1$) y un nivel de confianza $1 - q$, para lo cual se sigue el siguiente algoritmo:

- Paso 1 Estimar los parámetros de los modelos GARCH en (12) y (13) empleando el método de máxima verosimilitud.
- Paso 2 Estimar los parámetros de la distribución estable y normal en (12) y (13) respectivamente, empleando el método de máxima verosimilitud.
- Paso 3 Calcular μ_{t+1} y σ_{t+1} empleando (12) y (13).
- Paso 4 Calcular $z_i, i = 1, \dots, t$ en las expresiones (12) y (13), usando los parámetros obtenidos en el paso 1.
- Paso 5 Realizar S simulaciones de $z_{t+1}(\hat{z}_{t+1, j}, j = 1, \dots, S)$, usando los parámetros obtenidos en el paso 2.
- Paso 6 Estimar los rendimientos simulados $\hat{r}_{t+1, j}$ en (12) y (13), $j = 1, \dots, S$.
- Paso 7 Estimar el VaR como el negativo del $q - \text{esimo}$ cuantil de la distribución de probabilidad simulada.

En la presente investigación el VaR se estima a un nivel de confianza de 99% y 95%, respectivamente. Ambas estimaciones se presentan en las Tablas 6 y 7, respectivamente.

Tabla 6. VaR a un nivel de confianza de 99%.

Series	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
<i>Normal</i>	-0.5735	-3.3323	-1.3339	-0.7998	-1.3766
<i>α-estable</i>	-0.9909	-5.8681	-2.1052	-1.0364	-2.5046
Periodo 2002-2009					
<i>Normal</i>	-0.4580	-1.7571	-1.1547	-1.3564	-0.9971
<i>α-estable</i>	-0.8063	-3.3437	-1.8983	-2.7798	-1.6413
Periodo 2010-2015					
<i>Normal</i>	-0.5990	-3.4170	-1.3092	-0.7841	-1.4847
<i>α-estable</i>	-1.0665	-4.7365	-2.0151	-1.1588	-2.7530

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. VaR a un nivel de confianza de 95%.

Series	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
<i>Normal</i>	-0.4067	-2.3214	-0.9581	-0.5764	-0.9523
<i>α-estable</i>	-0.5950	-3.6855	-1.3299	-0.6282	-1.5278
Periodo 2002-2009					
<i>Normal</i>	-0.3257	-1.2113	-0.7721	-0.9810	-0.7054
<i>α-estable</i>	-0.4980	-1.8252	-1.2311	-1.5932	-1.0998
Periodo 2010-2015					
<i>Normal</i>	-0.4123	-2.3945	-0.9248	-0.5742	-1.0640
<i>α-estable</i>	-0.6230	-3.3121	-1.3486	-0.6839	-1.7168

Fuente: Elaboración propia.

En ambas estimaciones del VaR, se observa que el modelo α -estable proporciona valores mayores a las estimaciones basadas en la distribución normal, es decir, el modelo del VaR α -estable proporciona estimaciones de las pérdidas potenciales más conservadoras, lo cual es preferido por las instituciones financieras.

6.3 Evaluación del desempeño del VaR

En esta sección, se emplea la prueba llamada backtesting, para evaluar el desempeño del modelo VaR bajo el supuesto de que los rendimientos siguen una distribución normal y estable, respectivamente.

Sea $1 - q$ el nivel de confianza para el cálculo del VaR y k el número de observaciones históricas más recientes empleadas para pronosticar el VaR actual. Entonces, mediante los datos históricos de los dos años más recientes para predecir el VaR actual, se toma $k = 502$, es decir, este valor se utiliza tanto para la muestra total como para los dos períodos considerados.

Si se tiene una serie de rendimientos históricos con un total de datos, entonces la función indicadora del número de veces en que las pérdidas observadas exceden el VaR se define de la siguiente manera:

$$I_s = \begin{cases} 1, & H_s < -VaR_s \\ 0, & H_s \geq -VaR_s \end{cases}$$

donde H_t son los rendimientos históricos y $s = 1, \dots, k$.

El número de veces N_{1-q} que se ha excedido el VaR en el intervalo de prueba, sigue una distribución binomial con parámetros k y q

$$N_{1-q} = \sum_{s=1}^k I_s \sim B(k, q)$$

De acuerdo a esta distribución se tiene que el número de violaciones al VaR esperado (media) es $E(X_{1-q}) = k \cdot q$.

Luego se considera la hipótesis nula

$$H_0 : \text{La medida del VaR es eficiente}$$

la cual sigue una distribución binomial con parámetros k y q . La hipótesis nula se rechaza a un nivel de significancia x , si

$$\sum_{t=0}^{N_{1-q}} \binom{k}{t} q^t (1-q)^{k-t} \leq \frac{x}{2} \text{ or } \sum_{t=0}^{N_{1-q}} \binom{k}{t} q^t (1-q)^{k-t} \geq 1 - \frac{x}{2}$$

donde t es el tiempo actual y k es la longitud del intervalo de prueba.

Para valores grandes de k y niveles de confianza del VaR suficientemente altos, la distribución binomial se puede aproximar mediante la distribución normal. Por lo tanto, la hipótesis nula se rechaza a un nivel de significancia x si

$$N_{1-q} < k \cdot q - z_{1-x/2} \sqrt{k(1-q)q} \text{ or } N_{1-q} > k \cdot q + z_{1-x/2} \sqrt{k(1-q)q}$$

donde z_p es el $p\%$ cuantil normal estándar.

El rango para el cual el número de veces N_{1-q} que se ha excedido el VaR es aceptable y sus respectivas frecuencias $\frac{N_{1-q}}{k}$, a un nivel significativo del 1% se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Rango y frecuencia de violaciones del VaR aceptables a un nivel de significancia del 1 %.

VaR _{t-q}	k	Rango de violaciones del VaR aceptable	Frecuencia de violaciones del VaR aceptables
99%	502	[0,11]	[0.00%, 2.14%]
95%	502	[13,38]	[2.49%, 7.51%]

Fuente: Elaboración propia.

Con el objetivo de investigar si el modelo propuesto VaR α -estable tiene la capacidad de predecir el VaR en períodos de alta volatilidad como la crisis del

2008, se evalúa el desempeño del VaR en períodos distintos. En particular para el período 2002-2009, se emplean las observaciones históricas de los años 2008 y 2009 para pronosticar el VaR durante períodos de gran volatilidad.

Los resultados del backtesting se muestran en las Tablas 9 y 10. Los números resaltados en negritas, indican que el número excedió el rango y frecuencia de violaciones del VaR aceptables al 1% de significancia.

Tabla 9. Backtesting del VaR al nivel de confianza de 99%.

Series	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
<i>Normal</i>	9	4	5	20	8
<i>α-estable</i>	0	1	1	4	0
Periodo 2002-2009					
<i>Normal</i>	16	14	10	14	12
<i>α-estable</i>	0	2	2	3	1
Periodo 2010-2015					
<i>Normal</i>	12	4	7	8	6
<i>α-estable</i>	1	1	0	4	0

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. Backtesting del VaR al nivel de confianza de 95%.

Series	CEMEX	GFNORTE	GMEXICO	ICA	WALMEX
Periodo 2002-2015					
<i>Normal</i>	33	22	21	33	26
<i>α-estable</i>	7	3	4	11	5
Periodo 2002-2009					
<i>Normal</i>	43	36	35	41	30
<i>α-estable</i>	21	14	8	13	14
Periodo 2010-2015					
<i>Normal</i>	32	21	24	31	21
<i>α-estable</i>	10	5	4	15	5

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 9 se puede observar que durante el período de la crisis financiera del 2008 el número de violaciones del VaR, bajo el supuesto de normalidad al 99% para las series de rendimientos (excepto GMEXICO), se encuentran por encima del intervalo admisible, lo que implica que el VaR al 99% bajo el supuesto de normalidad subestima significativamente las pérdidas potenciales durante períodos de crisis.

En contraste, el número de violaciones del modelo VaR α -estable al 99% proporciona un número admisible de excepciones durante el período de crisis, lo cual sugiere que este modelo muestra una precisión satisfactoria durante períodos de turbulencias financieras para niveles de confianza altos.

Por otro lado, para el período posterior a la crisis del 2008 ambos modelos proporcionan estimaciones del VaR al 99% dentro del rango permitido (excepto CEMEX para el caso normal), sin embargo, el número de veces en el cual es excedido el VaR es menor para el modelo VaR α -estable, lo cual sugiere que este modelo proporciona estimaciones de las pérdidas potenciales más conservadoras.

En la Tabla 10 se puede observar que las estimaciones del VaR al 95% bajo el supuesto de normalidad durante el período de crisis, sobrepasan el rango permitido en el caso de CEMEX e ICA. Por otro lado, la estimación del VaR α -estable se encuentra ligeramente debajo del rango permitido para el caso de la serie GMEXICO.

Para el período posterior a la crisis las estimaciones del VaR al 95% bajo el supuesto de normalidad se encuentran dentro del rango permitido. Sin embargo, los resultados del modelo VaR a-estable no son satisfactorios, el número de violaciones del VaR de las series (excepto ICA) están por debajo del rango permitido.

7. Conclusiones

En esta investigación se consideró a la familia de distribuciones estables en la estimación del VaR como una alternativa en el mercado financiero mexicano y se propuso comparar las estimaciones del VaR obtenidas bajo la hipótesis estable y gaussiana durante y después de la crisis financiera del 2008.

Los resultados estadísticos sugieren que el modelo VaR α -estable proporciona estimaciones del VaR al 99% y 95% más precisas en períodos de alta volatilidad, es decir, las estimaciones del VaR son más eficientes bajo el supuesto de que los rendimientos siguen una distribución estable durante períodos de turbulencias financieras.

Por otro lado, los resultados muestran que el modelo bajo la hipótesis gaussiana subestima significativamente el VaR al 99% durante períodos de crisis, por el contrario en el período posterior a la crisis los resultados son aceptables, sin embargo las estimaciones del VaR α -estable exceden un menor número de veces el rango permitido, es decir estas son más conservadoras.

Además, en el período posterior a la crisis las estimaciones del VaR al 95% bajo la hipótesis gaussiana se encuentran dentro del rango permitido y en contraste las obtenidas bajo el modelo a-estable se encuentran por debajo del rango admisible, lo cual sugiere que este modelo sobrestima el VaR al 95% durante este período.

Concluyendo, esta investigación proporciona evidencia de que el modelo VaR α -estable estima satisfactoriamente el VaR para niveles altos de confianza incluso en períodos de alta volatilidad.

En contraste, en períodos de relativa tranquilidad para niveles de confianza bajos este modelo sobrestima las pérdidas potenciales. Al respecto, se sugiere desarrollar un trabajo futuro considerando el grado de persistencia de la volatilidad de los rendimientos. En esta línea, es posible considerar el trabajo de Brooks, Clare y Persaud (2000) en el cual se argumenta que los modelos GARCH típicamente exageran el grado de persistencia de la volatilidad de los rendimientos y sugieren una modificación simple del modelo GARCH, la cual consiste en la introducción de una variable proxy, la cual explica el nivel de

persistencia de la volatilidad y señalan mejora la precisión de las estimaciones. Sin embargo, el trabajo de Brooks, Clare y Persaud (2000) se desarrolla bajo la hipótesis normal en la perturbación aleatoria del modelo GARCH, dado que en este trabajo se emplea la distribución α -estable para la innovación del GARCH, no se requiere una variable proxy, aunque sería interesante realizar un ejercicio comparativo en un trabajo futuro, considerando la hipótesis estable, la hipótesis normal y contrastar los resultados empíricos con los aquí obtenidos.

Asimismo, en una investigación adicional, sería conveniente desarrollar un trabajo futuro considerando algunas otras distribuciones que también capturen las características empíricas de las series de datos financieros y comparar su desempeño con el modelo α -estable aquí propuesto. Además, se sugiere construir en otro trabajo futuro un portafolio de inversión y emplear funciones cópula para describir las correlaciones entre los rendimientos de las acciones empleando la distribución estable como la distribución marginal de los activos que conforman el portafolio

Bibliografía

- Bali, G., & Theodossiou, P. (2007). A Conditional-SGT-VaR Approach with Alternative GARCH Models. *Annals of Operations Research*, 151(1), pp. 241-267.
- Bawa, V. S., Elton, E. J., & Gruber, M. J. (1979). Simple Rules for Optimal Portfolio Selection In Stable Paretian Markets. *The Journal of Finance*, 34(4), pp. 1041-1048.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- Bonato, M. (2012). Modeling Fat Tails in Stock Returns: A Multivariate Stable-GARCH Approach. *Computational Statistics*, 27(3), pp. 499-521.
- Brooks, C., Clare, A. C., & Persaud, G. (2000). A Word of Caution on Calculating Market-based Minimum Capital Risk Requirements. *Journal of Banking and Finance*, 24(10), pp. 1557-1574.
- Cheng, B., & Rachev, S. (1995). Multivariate Stable Futures Prices. *Journal of Mathematical Finance*, 5, pp. 133-153.
- Climont-Hernández, J. A., & Venegas-Martínez, F. (2013). Valuación de opciones sobre subyacentes con rendimientos α -estables. *Revista de Contaduría y Administración*, 58(4), pp. 119-150.
- Climont, J. A., Venegas, F., & Ortiz, F. (2015). Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados estables: Un enfoque de minimización del riesgo. *Revista Nicolaita de Estudios Económicos*, 10(2), pp. 81-110.
- Contreras-Piedragil, C. E., & Venegas-Martínez, F. (2011). Valuación de opciones sobre activos subyacente con distribuciones α -estables. *Estocástica*, 1(1), pp. 55-71.
- Curto, J. D., Pinto, J. C., & Tavares, G. N. (2009). Modeling Stock Markets' Volatility Using GARCH Models with Normal, Student's t and Stable Paretian Distributions. *Statistical Papers*, 50(2), pp. 311-321.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometría*, 50(4), pp. 987-1007.
- Fama, E. F. (1965a). Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market. *Management Science*, 11(3), pp. 404-419.
- Fama, E. F. (1965b). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38(1), pp. 34-105.
- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*, 35(3), pp. 705-730.
- Hull, J., & White, A. (1998). Value at Risk When Daily Changes in Market Variables are not Normal Distributed. *Journal of Derivatives*, 5(3), pp. 9-19.

- Janicki, A., & Weron, A. (1994). Simulation and Chaotic Behavior of α -stable Stochastic Processes. *Marcel Dekker, Inc.* New York.
- Khindanova, I., Rachev, S., & Schwartz, E. (2001). Stable Modeling of Value at Risk. *Mathematical and Computer Modelling*, 34, pp. 1223-1259.
- Liu, S.M., & Brorsen, B. W. (1995). Maximum Likelihood Estimation of a GARCH-Stable Model. *Journal of Applied Economics*, 10, pp. 273-285.
- Mandelbrot. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36, pp. 394-419.
- Mandelbrodt, B. B. (1967). The Variation of Some Other Speculative Prices. *The Journal of Business*, 40, pp. 394-419.
- Marsaglia, G., & Marsaglia, J. (2004). Evaluating the Anderson-Darling Distribution. *Journal of Statistical Software*, 9(2), pp. 1-5.
- McCulloch, J. H. (1996). Financial Applications of Stable Distributions. *Handbook of Statistics*, 14, pp. 393-425.
- Mittnik, S., Rachev, S., & Paoletta, M. (1997). Stable Paretian Modelling in Finance: Some Empirical and Theoretical Aspects in R. Adler, R. E. Feldman and M. S. Taqqu (eds.).
- Nolan, J. P. (1997). Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. *Communications Statistician-Stochastic Models*, 13, pp. 759-774.
- Nolan, J. P. (2003). Modeling Financial Data with Stable Distributions. *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance: Handbooks in Finance*, 1 (May 2002), pp. 105-129.
- Nolan, J. P., & Ravishanker, N. (2009). Simultaneous Prediction Intervals for ARMA Processes with Stable Innovations. *Journal of Forecasting*, 28(3), pp. 235-246.
- Nolan, J. P. (2013). Multivariate Elliptically Contoured Stable Distributions: Theory and Estimation. *Computational Statistics*, 28(5), pp. 2067-2089.
- Ortobelli, S., Huber, I., & Schwartz, E. (2002). Portfolio Selection with Stable Distributed Returns. *Mathematical Methods of Operation Research*, 3, pp. 265-300.
- Panorska, A., Mittnik, S., & Rachev, S. T. (1995). Stable GARCH Models for Financial Time Series. *Applied Mathematics Letters*, 8(5), pp. 33-37.
- Rachev, S., & Han, S. (2000). Portfolio Management with Stable Distributions, *Mathematical Methods of Operation Research*, 51, pp. 341-352.
- Rachev, S. T., & Mittnik, S. (2000). Stable Paretian Models in Finance. New York, NY: Wiley.
- Schwert, G.W. (1989). Why Does Stock Market Volatility Change Over Time?. *Journal of Finance*, 44, pp. 1115-1153.
- Taylor, S. (1986). Modeling Financial Time Series. New York, NY: Wiley.
- Theodossiou, P. (1998). Financial Data and the Skewed Generalized T Distribution. *Management Science*, 44(12), pp. 1650-1651.