

Prima para la cobertura por exceso de contagios de COVID-19

Guillermo Sierra Juárez¹ - Universidad de Guadalajara, México

Resumen

Con la aparición del COVID-19 muchos de los sectores de la economía resultaron afectados negativamente, particularmente el de seguros. Con el apoyo de los gobiernos o de las reaseguradoras mediante el pago de una prima las compañías aseguradoras podrían recibir un recurso contingente ante el exceso de contagios provocados por la pandemia. El presente trabajo calcula la prima para cubrir el exceso de población afectada con un modelo de opciones financieras con un proceso de difusión sin y con saltos de Poisson y el modelo epidemiológico Susceptibles-Infectados-Recuperados (SIR), esta propuesta no cuenta con muchos precedentes. El sistema obtenido se aproxima con el método de simulación Monte Carlo. Al final se presentan los resultados donde hay diferencias importantes en las primas de las opciones al incluir saltos de Poisson. Por último, dentro de las principales conclusiones se destaca que el valor de la prima depende de la trayectoria de comportamiento de los contagios y del valor de ejercicio del contagio (K). El trabajo tiene limitaciones al aplicarse a casos muy particulares, pero que podrían extenderse a casos más reales en investigaciones futuras.

Clasificación JEL: G13, G17, G22.

Palabras clave: COVID-19, Monte Carlo, Reaseguros, Opciones financieras, Epidemiología, procesos de Poisson.

Premium for Coverage for Excess COVID-19 Infections

Abstract

Many of the sectors in the economy were negatively affected, particularly insurance sector with the appearance of COVID-19. With the support of governments or reinsurers through the payment of a premium, insurance companies could receive a contingent resource in the face of excess infections caused by the pandemic. This paper calculates the premium to cover the excess affected population with a financial options model with a diffusion process without and with Poisson jumps and the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemiological model (this estimation is original). The obtained system is approximated with the Monte Carlo simulation method. The results show that there are important differences in the option premiums when Poisson jumps are included. Lastly, it is highlighted that the premium depends on the behavior trajectory of contagions and strike contagion value (K). This work has a limitation when applied to very particular cases, but a calibration of the parameters with more real information could be done in future research.

JEL Classification: G13, G17, G22.

Keywords: COVID-19, Monte Carlo, Reinsurance, Financial options, Epidemiology, Poisson process.

¹ Autor de correspondencia. Departamento de Métodos Cuantitativos, CUCEA, Universidad de Guadalajara. Email: gsierraj@cucea.udg.mx

*Sin fuente de financiamiento para el desarrollo de la investigación



1. Introducción

Desde hace aproximadamente dos años con el brote de la pandemia de COVID-19 en China y su dispersión a casi todos los países, así como de sus distintas variantes (por ejemplo: delta y omicrón entre las más conocidas) y con el lamentable efecto de un gran número de personas infectadas y de muertes. Los gobiernos de los distintos países del mundo establecieron inicialmente medidas de aislamiento como forma de control para evitar contagios y muertes, pero con un efecto secundario de disminuir la actividad económica. Posteriormente las campañas de vacunación y los protocolos de salubridad han colaborado al control y han permitido poco a poco el restablecimiento de la vida económica.

El impacto de corto y largo plazo en los mercados financieros y la economía ha sido significativo en todos los países, no sólo ha tenido un impacto negativo en el sector real de la economía, sino en muchos otros sectores financieros, por ejemplo: los bancos y las aseguradoras.

Existen distintas maneras de describir el comportamiento de una pandemia. Una aproximación clásica se puede encontrar en Li (2018) donde se diseña un modelo matemático simple de una enfermedad infecciosa cuya meta es describir la forma de transmisión de la misma.

Cuando el número de casos contagiados llega a aumentar más rápido que el promedio en un breve periodo de tiempo, un brote de la enfermedad ocurre y si la enfermedad se dispersa a gran velocidad a muchos individuos se estará hablando de una epidemia.

De acuerdo con Antona (2020), una industria que ha resultado particularmente afectada es la de seguros. A lo largo de la historia se ha mostrado su importancia durante las crisis ya que actúa como amortiguador entre la economía y la sociedad, ayudando a proteger a las personas y sus pertenencias y asegurando así que la vida y la economía continúen de la mejor forma.

Es de notar que la industria aseguradora tiene una naturaleza anti- cíclica, en otras palabras, durante los periodos de crisis económicas las ventas crecen en productos como los seguros de vida, seguros de salud o patrimonio, como resultado de una mayor conciencia ante los riesgos de personas y empresas, esto abre una ventana de oportunidad para las aseguradoras para entrar en más mercados. Por otra parte, la industria aseguradora entra de manera diferida en los periodos de depresión económica, ya que las primas de riesgo se pagan por adelantado, lo que permite invertir dichos ingresos para generar utilidades financieras, en cambio los costos de siniestralidad, si llegaran a ocurrir, se cubren después del mismo.

De acuerdo con el artículo mencionado, en ningún momento en las últimas décadas ninguna crisis sanitaria había detenido las actividades de tantas empresas y, a la vez, mantenido en aislamiento, a millones de personas en todo el mundo. La crisis de COVID-19, no sólo pone en riesgo la salud y vida de seres humanos, sino que pone en riesgo la supervivencia de las empresas.

El sector asegurador ha sido uno de los más castigados durante la pandemia de COVID-19, según Ortiz (2021) esta pandemia se ha convertido en el evento catastrófico más caro en el sector asegurador de México en toda la historia con 2,494 millones de dólares, más aún que el huracán Wilma del 2005.

En las catástrofes anteriores desafortunadamente siempre ha habido pérdidas humanas pero los daños eran fundamentalmente patrimoniales, pero en el caso de la pandemia de COVID-19 han ocurrido la mayoría de las coberturas de gastos médicos mayores y seguros de vida. En casos

normales las pandemias son coberturas excluidas pero las compañías de seguros hicieron un esfuerzo de incluir un endoso de póliza para la protección Covid-19 por 11.3 millones de personas por cada seguro. Además de acuerdo a esa publicación el Vicepresidente de la AMIS informa que el costo promedio en el ramo de gastos médicos y en el ramo de vida han sido \$500,000 y \$234,000 respectivamente.

En Mendoza (2021) se explica que entre un 80 y 90% de los casos, las compañías de seguros buscan un reaseguro para cubrirse de grandes riesgos, mientras que en la misma proporción, las aseguradoras tienden a asumir sus propias pérdidas en rubros como gastos médicos, vida o autos.

El presente trabajo tiene el objeto de proponer una forma complementaria a la que utilizan los actuarios para establecer una prima ante el riesgo de tener una proporción mayor respecto al pronóstico esperado del porcentaje de contagiados en una pandemia como fue la del COVID-19, esto con la intención de que los gobiernos o reaseguradoras puedan apoyar con instrumento de cobertura a las aseguradoras en caso de rebasar sus propias expectativas de individuos contagiados. Para ello, se revisa la teoría contagios de SIR de Kermack y McKendrick (1991) sobre epidemias, además de la teoría básica de opciones financieras de Black - Scholes incluyendo saltos de difusión, la solución del sistema planteado se hace a través del método de simulación Monte Carlo. La forma en que se presenta la propuesta es la siguiente: se inicia con la presente introducción para posteriormente hacer una revisión de la literatura para luego plantear el marco teórico, es decir, los modelos que se utilizarán. Posteriormente se presenta el modelo para finalmente mostrar en las últimas secciones los resultados y las conclusiones.

2. Revisión de la Literatura

Existe una amplia literatura alrededor del tema de la pandemia COVID-19 tratando el caso desde varias perspectivas que van desde el aspecto de salud hasta el aspecto económico. A continuación se presenta un resumen de las publicaciones que pueden servir de antecedentes cercanos al presente trabajo.

En el artículo Nicola *et al.* (2020) se hace una revisión sobre los efectos del COVID-19 en la economía y de cómo el aislamiento y el distanciamiento social han conducido a un aumento del desempleo y una disminución de la fuerza laboral. El artículo revisa los efectos del COVID-19 en los sectores primarios como la agricultura y el petróleo, en sectores secundarios como de manufacturas y en terciarios como educación, así como el impacto en los mercados financieros y la economía mundial, de la industria farmacéutica y del cuidado de la salud, el impacto social, así como las respuestas de distintos países ante la pandemia.

En Babuna *et al.* (2020) se revisó el efecto del COVID-19 en la industria de seguros estudiando el caso de Ghana en 2020 haciendo una comparación paralela con pandemias anteriores como SARS-CoV, H1N1 y MERS y se simula el efecto de la pandemia en la industria de seguros y se hicieron entrevistas cualitativas y cuantitativas para estimar el impacto de la pandemia. Actualmente, la tendencia es una recesión económica con ganancias decrecientes, pero reclamos crecientes. Debido a la cancelación de viajes, eventos y otras pérdidas económicas, la industria de seguros de Ghana atestigua grandes pérdidas.

En opinión del autor, mientras persista la pandemia, las aseguradoras deben adaptarse a trabajar desde ubicaciones remotas, capacitar y equipar al personal para trabajar bajo las normas de distanciamiento social, mejorar los protocolos de ciberseguridad y simplificar los reclamos.

El mercado de seguros se ha visto impactado por el brote de la pandemia de COVID-19 según Wang *et al.* (2020), el trabajo hace uso de datos mensuales de provincias de China y modelos de efectos fijos para estudiar cómo COVID-19 ha tenido efectos en el mercado de seguros en ese país. Los autores encontraron que los ingresos por primas de seguros comerciales, la tasa de crecimiento mensual interanual de las primas, la densidad de los seguros y la profundidad de los seguros han disminuido debido al COVID-19. Los impactos negativos sobre la propiedad y los seguros personales son estadísticamente significativos.

En Chicaíza *et al.* (2007) se utilizaron las opciones para aproximar las primas de seguro y reaseguro en el sistema de salud de Colombia, buscando evidenciar que la cobertura estimada por las operaciones de reaseguro de enfermedades costosas en ese sistema de salud pudiera ser duplicada a través de la adquisición de opciones y teniendo en cuenta que la teoría de valuación de opciones puede ser aplicada para la estimación del valor de las primas y de reaseguro.

Los autores utilizaron los derivados financieros como una alternativa a la forma tradicional de reaseguros, que se da cuando compañías reaseguradoras adquieren el riesgo tomado por las compañías aseguradoras. Lo anterior dada la existencia de enfermedades catastróficas, como las pandemias, que disparan el costo de siniestralidad para las empresas aseguradoras

En Li *et al.* (2021) se aclara que las tasas de interés y mortalidad son independientes de la incertidumbre durante el periodo de pandemia de COVID-19. Utilizando los datos más recientes de mortalidad y tasas de interés de Estados Unidos encuentran una fuerte correlación negativa entre los tamaños de salto de la tasa de interés y el exceso de mortalidad, y una intensidad de salto mucho mayor cuando se incluyen los datos de la pandemia. Los resultados de su trabajo muestran que durante la experiencia de la pandemia se puede cambiar drásticamente la impresión de riesgo de los inversionistas y probablemente se amoldaría la mortalidad del mercado del riesgo post-pandemia.

El propósito en Arnone *et al.* (2021) es proporcionar una descripción detallada de las estrategias y productos para gestionar los riesgos catastróficos y revisar la literatura sobre este tema, además de proponer un modelo de fijación de precios de puts sobre catástrofes (CatEPut) donde consideran información proveniente tanto del mercado de acciones como del de opciones.

El modelo planteado extiende el modelo de difusión con salto utilizado en la literatura de CatEPuts, tomando en cuenta la dinámica subyacente del precio de las acciones como un proceso de Lévy más general con un componente difusivo, una parte de salto de actividad infinita y un término de salto de actividad finita correlacionado con el proceso de pérdida catastrófica. El modelo produce patrones de precios de acciones más realistas en comparación con los modelos de difusión de salto.

Desde una visión práctica se amplía la literatura sobre este tema haciendo un desarrollo de un procedimiento de calibración basado en datos reales, que hace uso de series de tiempo del rendimiento de acciones, y donde la capitalización de una compañía de seguros esta en búsqueda de protección contra pérdidas catastróficas y con la información extraída de opciones europeas cotizadas sobre la acción.

El modelo propuesto explica los rendimientos de las acciones observados y las volatilidades implícitas de opciones mensuales, tanto en los períodos de calma, como en los periodos de crisis. Finalmente se muestra que la relación entre put simple y CatEPuts depende estrictamente de la forma de la sonrisa de la volatilidad implícita.

En Chang y Hung (2009) se menciona que una opción put catastrófica es valiosa en los casos en que el precio del activo subyacente esté por debajo del precio strike; además, de que debió haber ocurrido un evento catastrófico específico de tal forma que hubiera influido en la empresa asegurada. Los autores analizan la valuación de opciones put catastróficas bajo tasas de interés deterministas y estocásticas cuando el precio del activo subyacente se modela a través de un proceso de Lévy con actividad finita. Los autores proponen fórmulas analíticas explícitas para evaluar los valores de las opciones put de catástrofes.

Los autores en Lee y Yu (2007) proponen un modelo para medir cómo el riesgo de incumplimiento, el riesgo base, el riesgo de catástrofe y la tasa de interés están asociados a la valuación de un reaseguro catastrófico. Los resultados de su trabajo han mostrado que, para la mayoría de los escenarios posibles, la prima de riesgo de incumplimiento puede ser importante en la presencia de riesgo CAT y no debe ser ignorado en la valoración de la póliza de reaseguro. De los resultados también aprecia que los bonos CAT elevan el papel de la póliza de reaseguro y reducen su prima de riesgo de incumplimiento.

La magnitud del efecto del riesgo base disminuye con la posición de capital del reasegurador y el nivel de activación de los bonos CAT, pero aumenta con la intensidad de CAT y la varianza de pérdida. La emisión de bonos CAT, incluso con el riesgo de base potencial, todavía aumenta el valor de un contrato de reaseguro CAT y además reduce su riesgo de incumplimiento.

En Cummins *et al.* (2000) analizan el riesgo base de los derivados a partir del índice de pérdidas catastróficas (CAT) que bursatilizan pérdidas por eventos catastróficos como huracanes y terremotos. Analizan la efectividad de cobertura de estos instrumentos para 255 aseguradoras que suscriben el 93 por ciento de los valores de propiedad residencial asegurados en Florida, el estado más severamente afectado por la exposición a huracanes en los Estados Unidos. Dentro de los principales hallazgos es que las empresas en los tres cuartiles de participación de mercado más grandes de Florida pueden cubrirse de manera casi tan efectiva utilizando los contratos de índices intra-estatales como utilizando contratos que liquidan sus propias pérdidas.

La cobertura con los contratos estatales es efectiva sólo para las aseguradoras con las mayores cuotas de mercado y para las aseguradoras más pequeñas que están muy diversificadas en todo el estado. Además, los resultados respaldan las hipótesis de la teoría de la agencia de que las aseguradoras mutuas están más diversificadas que las acciones y que las empresas individuales no afiliadas están más diversificadas que las aseguradoras que son miembros de grupos.

En Vaugirard (2003) se describen valuaciones vinculadas a seguros simulados dentro de un marco libre de arbitraje, al mismo tiempo que tiene en cuenta eventos catastróficos y además de tomar en cuenta las tasas de interés estocásticas. El propósito es realizar simulaciones más precisas, a pesar de las características de inestabilidad, además se recupera un precio de arbitraje bien definido para los bonos catastróficos, a pesar de las discontinuidades en los procesos subyacentes.

Adicionalmente se realiza un análisis de estática comparativa que destaca la sensibilidad de los precios de los valores vinculados a seguros a la exposición al riesgo de la naturaleza y muestra que la estructura temporal de sus diferenciales de rendimiento tiene forma de joroba, como ocurre

con los bonos corporativos. La fijación de precios de los derivados meteorológicos es un seguimiento que vale la pena considerar considerando que su éxito en los mercados de derivados implica una valoración adecuada y simulaciones precisas.

En Aslan *et al.* (2017) se menciona que en los casos de desastres naturales como son: terremotos, inundaciones y otros, provocan pérdidas de vidas a gran escala y daños por miles de millones de dólares. Sin embargo, el sector global de seguros y reaseguros sólo soporta una parte de este costo; la mayor parte del proyecto de ley aún recae sobre las corporaciones, las comunidades locales y los gobiernos que luchan por recuperarse incluso años después del desastre. Se considera que uno de los factores clave por los que los sectores de seguros y reaseguros no desempeñan un papel más activo es la dificultad para absorber las pérdidas y valorar con precisión los riesgos subyacentes.

En su trabajo se presenta un modelo de valoración para catastrophe equity puts (CatEPuts), con un método alternativo de transferencia de riesgo, en donde el modelo de valoración propuesto se basa en un modelo de pérdida de ingeniería de cuatro pasos para calcular el valor razonable del CatEPut para diferentes intensidades de amenazas y respuestas estructurales. Los resultados muestran que dicho modelo puede proporcionar el vínculo necesario entre las características de ingeniería de los activos físicos subyacentes y el valor razonable de CatEPut.

Finalmente en Lesniewski *et al.* (2020) se presenta un modelo estocástico para la valoración de opciones sobre la fracción de individuos infectados durante una epidemia. El sistema dinámico estocástico subyacente es una versión diferencial estocástica del modelo SIR de epidemiología matemática.

3. Antecedentes de Modelos

En la primera parte de esta sección se muestra una revisión del modelo epidemiológico básico que es una de las piezas fundamentales del modelo que se propone en la sección siguiente. En la segunda parte se presenta una revisión de los conceptos básicos del modelo de opciones financieras de Black-Scholes extendido al modelo de Merton, para posteriormente presentar una posible vinculación de aplicación de los modelos de opciones al caso de coberturas de riesgo de contagios de epidemias para posibles reaseguradoras. Finalmente, en la última parte son incorporados los procesos de difusión con saltos de Poisson.

Siguiendo a Li (2018) se puede plantear un modelo para entender cómo se transmiten y dispersan las enfermedades contagiosas con la finalidad de entenderlas, establecer controles, medidas de prevención, así como conocer su potencial peligrosidad. Existen al menos tres formas de la utilización de las matemáticas para modelar las enfermedades infecciosas:

- i. Utilizando los datos y la estadística tradicional.
- ii. Utilizando matemáticas de naturaleza determinista como son las ecuaciones diferenciales o las ecuaciones en diferencias.
- iii. Utilizando las matemáticas de naturaleza estocástica.

Dentro del último grupo se pueden utilizar la conocida como aproximación de compartimientos, donde la población anfitriona total (huésped) se separa en grupos independientes de acuerdo a la evolución de la enfermedad, lo común, es considerar los siguientes grupos en el modelo conocido como **SIR**: susceptibles (S), infectados (I) y recuperados (R).

El modelo (SIR) más simple es el de Kermack y McKendrick (1991), de acuerdo con Li (2018), donde se consideran los siguientes supuestos sobre la población anfitriona

- 1) El contagio o transmisión de la enfermedad ocurre por el contacto directo entre los individuos huéspedes.
- 2) Entre los huéspedes de distintos compartimientos, la cantidad de contactos depende solamente del número de huéspedes de ese compartimiento. La tasa de incidencia (número de infecciones por unidad de tiempo) puede ser expresada por $\lambda I(t)S(t)$ donde λ es conocido como coeficiente de transmisión.
- 3) La tasa de transferencia del compartimiento es proporcional al tamaño de la población del compartimiento, por ejemplo, la tasa de transferencia de infectados (I) a recuperados (R), puede ser escrita como $\gamma I(t)$.
- 4) No existe pérdida de inmunidad y posibilidad de reinfección, lo que implicaría que la proporción de transferencia de individuos recuperados (R) a población sana (S) es cero.
- 5) No se considera la posibilidad de entrada de nuevos susceptibles (flujo de entrada cero) y no se remueven de algún compartimento.
- 6) La población total anfitriona siempre permanece constante.

A continuación se muestra el modelo SIR más básico a partir de los supuestos anteriores con a través del sistema siguiente de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda IS \quad (1 a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda IS - \gamma I \quad (1 b)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (1 c)$$

considerando las condiciones iniciales $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = 0$, donde las variables del sistema son: $S(t)$ la población anfitriona, $I(t)$ la población infectada y $R(t)$ la población huésped de recuperados y λ y γ son los parámetros del modelo. Si se piensa en los tres compartimientos, el aumento en el número de infectados se incrementará de acuerdo al tamaño de la población infectada y población susceptible (ecuación (1 b)), y en esa misma proporción disminuirá de la población susceptible (ver ecuación (1 a)). Siguiendo esta lógica, el crecimiento en el número de recuperados aumentará de acuerdo al número de infectados con la proporción de la tasa de transferencia ecuación (1 c) y también en esa misma proporción se reducirá el incremento de infectados ecuación (1 b). Finalmente la población total permanece invariante $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ o bien en la situación inicial $N(t) = N_0 = S_0 + I_0 + R_0$.

En esta segunda parte, otro elemento importante para el modelo propuesto es el referente a las opciones financieras a través del modelo Black - Scholes que nos sirve para evaluar opciones financieras de tipo europea sobre activos financieros. Posteriormente a este modelo seminal, Merton realizó una extensión hacia la forma de evaluar la capacidad de cumplimiento de pago de las empresas. El modelo, de forma simplificada, hace el supuesto de que la deuda de una empresa se considera como una opción de compra sobre el capital de la misma empresa, es decir, el precio de una opción es equivalente al valor de la empresa. En el vencimiento, si el monto de la deuda es menor al valor de la empresa considerada el o los reclamantes no ejercerán su opción ya que es posible liquidar la deuda, pero si la deuda es mayor que el valor de la empresa entonces los acreedores podrían ejercer su opción y tendrían el derecho a quedarse con la empresa.

De acuerdo a Martínez (2001) y Venegas-Martínez (2008), el modelo de Merton es una modificación del modelo de Black-Scholes para estimar probabilidades de incumplimiento en las empresas. El modelo supone que se tiene información perfecta del mercado y que se conoce del valor de los activos y de la deuda de todas las compañías y el incumplimiento puede llegar a presentarse cuando el valor de los activos es inferior al valor total de la deuda financiera. En dicho modelo se hace el supuesto de que una empresa emite bonos cupón cero que vencen en una fecha establecida T .

El valor de la empresa V_t está integrado por el valor de mercado sus acciones (S_t) y de sus bonos o deuda (B_c) en el tiempo t :

$$V_t = S_t + B_c(t, T) \quad (2)$$

donde se supone que V_t y S_t siguen un movimiento geométrico browniano, donde σ_s , σ_v son las volatilidad de las acciones y la volatilidad del valor de la empresa respectivamente y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento browniano

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dW_t \quad (3 a)$$

$$dS_t = \mu_s S_t dt + \sigma_s S_t dW_t \quad (3 b)$$

En el vencimiento (T), si $V_T < D$, es decir, si el valor de la empresa es menor que la deuda (D), entonces la empresa incumple con pagar su deuda, y en ese caso $S_T = 0$. En el caso contrario, $V_T \geq D$, la empresa podrá pagar su deuda en T y $S_T = V_T - D$. Lo anterior se puede resumir en la siguiente expresión:

$$S_T = \max(V_T - D, 0) \quad (4)$$

entonces el valor de mercado de las acciones pudiera interpretarse como una opción financiera europea de tipo call sobre el valor de mercado de la empresa con precio igual al pago de su deuda. En términos de la ecuación Black-Scholes la solución puede quedar expresada de la siguiente forma:

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (5)$$

en donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}} \quad (5 a)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T-t} \quad (5 b)$$

y la deuda al día de hoy es $B_c(t, T) = V_t - S_t$.

$$S_t = e^{-r(T-t)} E[V_T 1_{\{V_T > D\}} | V_t] - D e^{-r(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D | V_t\} \quad (6)$$

si comparamos la ecuaciones (5) y (6), resulta que la probabilidad de que la compañía pueda cumplir con el pago de su deuda es (con Φ la función de distribución normal estándar):

$$\mathbb{P}\{V_T > D | V_t\} = \Phi(d_2) \quad (7)$$

y por el otro lado, la probabilidad de que la compañía incumpla con el pago de su deuda es:

$$\mathbb{P}\{V_T < D | V_t\} = 1 - \Phi(d_2) = \Phi(-d_2) \quad (8)$$

En la última parte de esta sección, se presenta una revisión de un proceso de difusión con saltos, recordando que el proceso está definido de la forma siguiente (de acuerdo a Venegas-Martínez (2008)):

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } vdt \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - vdt \end{cases} \quad (9)$$

si $dt \rightarrow 0$ o presentado de una forma alternativa

$$\mathbb{P}\{\text{un salto de tamaño 1 durante } dt\} = \mathbb{P}\{dN_t = 1\} = vdt$$

$$\mathbb{P}\{\text{ningún salto durante } dt\} = \mathbb{P}\{dN_t = 0\} = 1 - vdt$$

Tomando en cuenta que $\mathbb{E}[dN_t] = \text{Var}[dN_t] = vdt$, y el parámetro v correspondería al número esperado de saltos por unidad de tiempo, también conocido como la intensidad del proceso Poisson, recordando que la distribución Poisson está definida por

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{v^x e^{-v}}{x!} \quad \text{donde } x \in \{0, 1, 2, \dots, \dots\} \quad (10)$$

El proceso de difusión Poisson dN_t definido anteriormente puede ser incorporado en un movimiento geométrico browniano, S_t de la siguiente forma:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \nu S_t dN_t \quad (11)$$

en donde μ es la media esperada y σ la volatilidad bajo la condición de que no ocurra saltos y además suponiendo que dW_t y dN_t no están correlacionadas. Si hubiera un salto, S_t cambia a $S_t(1 + \nu)$ donde se supone también que ν también es independiente.

Existen una gran variedad de trabajos relacionados con los procesos de difusión con saltos, se puede mencionar entre otros el aplicado a economía como Venegas-Martínez (2001) en donde se desarrolla un modelo estocástico de la estabilización de la inflación basada en el tipo de cambio (con credibilidad imperfecta) donde los agentes de devaluación son guiados por un proceso de saltos de difusión, en ese ambiente los movimientos brownianos conducen la tasa de devaluación y los procesos Poisson determinan la probabilidad de devaluación.

Aplicando el lema de Itô al proceso de difusión con saltos $c = c(S_t, t)$ tenemos

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + [c(S_t(1 + \nu), S_t) - c(S_t, t)] dN_t \quad (12)$$

y después de una transformación logarítmica

$$d \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t + \ln(1 + \nu) dN_t \quad (13)$$

A partir de los elementos vistos anteriormente, en la siguiente sección se presentará el modelo propuesto.

4. Modelo Propuesto

Con los antecedentes mencionados en la sección anterior, se propone un modelo para determinar una cobertura por el exceso de porcentaje de contagiados en una situación de pandemia siguiendo la propuesta del modelo de opciones financieras de Black-Scholes- Merton y el comportamiento de contagios descrito por el modelo epidemiológico SIR incluyendo los términos: estocástico y saltos de difusión Poisson. También puede considerarse como un antecedente el trabajo de Sierra G. (2021) pero planteado en una perspectiva de contagio.

En el actual modelo presentado, el subyacente corresponderá al incremento diario en el número de contagios en una pandemia como la del COVID-19 (porcentaje de cambio), esta variable, así como en el número de individuos susceptibles y de recuperados serán planteados de acuerdo al modelo SIR pero incluyendo un término estocástico. Como se mencionó anteriormente el modelo plantea el uso la metodología de opciones financieras, donde el equivalente del precio de ejercicio corresponde al porcentaje estimado de contagios al final de un cierto periodo o vencimiento.

Se considera el máximo entre diferencia entre el valor esperado de los posibles valores en un tiempo final de contagios modelados por el SIR estocástico con saltos o sin saltos de difusión en el

vencimiento y el valor de contagios de referencia al final del mismo periodo (o valor de porcentaje de ejercicio K) o cero. Después se debería considerar un factor de conversión de infectados a una unidad monetaria (por simplicidad en este caso $F=1$) y posteriormente se descuenta a valor presente. Dicho valor deberá corresponder a la valuación de una cobertura por exceso de enfermos en la pandemia en términos de porcentaje. Si se considera el total de contagios y costo promedio por enfermo podría hacerse una estimación del costo total de la prima.

$$C = e^{-Rt} FE[\max (I_T - K, 0)] \tag{14}$$

A continuación se plantea el modelo SIR incluyendo un movimiento browniano (dW_t) $_{t \in [0, T]}$ como un factor estocástico (Venegas-Martinez (2008)), tanto para el comportamiento de los susceptibles como el de contagiados, de acuerdo a Li (2018) y Lesniewski *et al.*(2020)

$$\frac{dS_t}{S_t} = -\lambda I_t dt - \sigma I_t dW_t \tag{15 a}$$

$$\frac{dI_t}{I_t} = (\lambda S_t - \gamma) dt + \sigma S_t dW_t \tag{15 b}$$

$$\frac{dR_t}{dI_t} = \gamma dt \tag{15 c}$$

considerando un horizonte de tiempo $T > 0$ y $\xi, \eta > 0$, la ecuación backward de Kolmogorov para la función de Green $G = G_{T, \xi \eta}(t, S, I)$ y además el lema de Itô, se pueden escribir las ecuaciones anteriores en una sola que sea función del tiempo para los individuos susceptibles y los contagiados.

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \lambda S_t I_t \frac{\partial G}{\partial S_t} + (\lambda S_t - \gamma) I_t \frac{\partial G}{\partial I_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 I_t^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial I_t^2} - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial I_t} \right] = 0 \tag{16}$$

que $G = G_{T, \xi \eta}(t, S, I)$ satisface las condiciones de frontera

$$G_{T, \xi \eta}(T, S, I) = \delta(S_t - \xi) \delta(I_t - \eta)$$

Considerando incluir un término de un salto de difusión de Poisson en la ecuación (15 b) que pudiera representar a un pequeño rebrote, aumento o disminución de controles sanitarios

$$\frac{dS_t}{S_t} = -\lambda I_t dt - \sigma I_t dW_t \tag{17 a}$$

$$\frac{dI_t}{I_t} = (\lambda S_t - \gamma) dt + \sigma S_t dW_t + S_t \nu dN_t \tag{17 b}$$

$$\frac{dR_t}{dI_t} = \gamma dt \tag{17 c}$$

Independientemente de que es posible resolver la ecuación (16) por algún método teórico de ecuaciones diferenciales, en el presente trabajo se propone una aproximación alternativa para describir la evolución del sistema de ecuaciones anteriores (17 a), (17 b) y (17 c) mediante el método de simulación Monte Carlo. Para estimar la solución, como primer paso se plantea el cambio de variables en los individuos susceptibles y contagiados siguiente: $X_t = \exp(-l_t)$ y $Y_t = \exp(-m_t)$. Posteriormente se hace una discretización de las variables involucradas, además de considerar intervalos discretos del tiempo (δ) llegando al siguiente sistema equivalente (nos interesan principalmente los contagiados y su relación con los individuos susceptibles).

$$l_{n+1} = l_n + (\lambda\delta + \sigma\sqrt{\delta}z_n)e^{-m_n} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta e^{-2m_n} \quad (18 a)$$

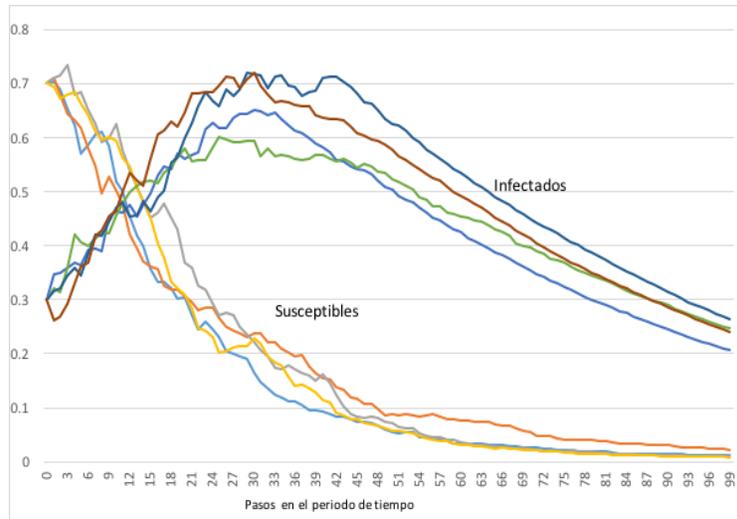
$$m_{n+1} = m_n + \gamma\delta - (\lambda\delta + \sigma\sqrt{\delta}z_n)e^{-l_n} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta e^{-2l_n} + e^{-2l_n}\ln(1+v)N_n \quad (18 b)$$

5. Resultados

De acuerdo a las ecuaciones (14), (18 a) y (18 b) de la sección anterior para la determinación de la prima riesgo de cobertura por exceso de porcentaje de contagios basados en un modelo SIR con modelación estocástica y saltos de Poisson se puede describir el comportamiento utilizando un método de simulación.

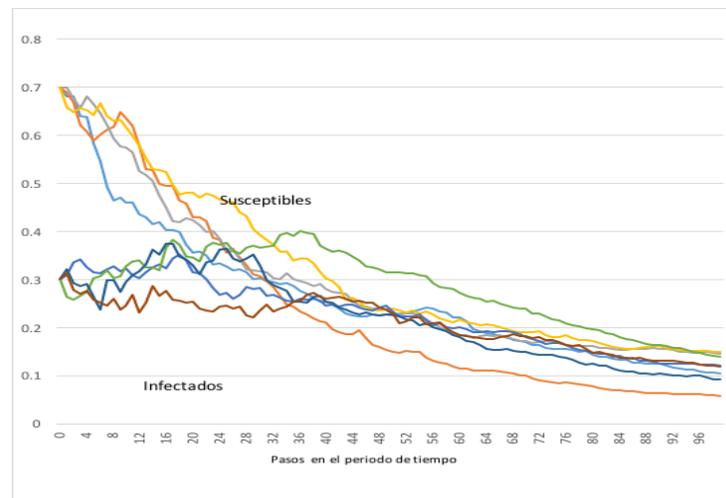
Para encontrar las soluciones se desarrolló un código en el lenguaje de programación Python y así poder utilizar el método Monte Carlo. A continuación, se muestran algunas posibles trayectorias de la evolución de individuos infectados y susceptibles en el tiempo, donde se plantea un horizonte de diez años dividido en subperiodos (o pasos) de 100. En la gráfica 1 a) se observa las trayectorias de los individuos susceptibles e infectados de acuerdo al modelo SIR estocástico siendo muy similar al caso SIR determinista.

De acuerdo a la gráfica 1 a) el número de posibles individuos a contagiarse o susceptibles va disminuyendo en el tiempo ya que cada vez hay menos individuos por enfermarse, mientras que las personas contagiadas crecen paulatinamente hasta llegar a un valor máximo, después de tal punto las variables empiezan a disminuir. En la gráfica 1 b) en donde como se recordara se le agrega el salto de Poisson, el pico de individuos contagiados ocurre más rápido, así como su disminución en el misma variable también es más rápida y prolongada.



Gráfica 1.a Ejemplos de trayectorias de Susceptibles e Infectados del modelo SIR estocástico sin saltos de Poisson ($S_0=0.30, \sigma = 0.30, \nu = 0$)

Fuente: Elaboración propia



Gráfica 1.b Ejemplos de trayectorias de Susceptibles e Infectados del modelo SIR estocástico con saltos de Poisson ($S_0=0.30, \sigma = 0.30, \nu = 0.05$)

Fuente: Elaboración propia

Para el cálculo de la opción financiera propuesta se consideran en cada caso 10,000 simulaciones con la misma partición 100 subdivisiones considerando dos casos como en los ejemplos anteriores: a) individuos susceptibles e infectados agregando un proceso estocástico b) individuos susceptibles e infectados agregando un proceso estocástico y adicionando saltos de Poisson. Además, en cada caso se hace una estimación de las opciones en periodos de vencimiento múltiples de 10 hasta alcanzar el periodo 100. De esta forma se pueden valorar las opciones individuales en cada vencimiento o bien como si fuera una sola opción considerando la suma de todos, es decir, como una opción tipo bermuda donde solamente en ciertas fechas se pueden ejercer dichas opciones. Los parámetros utilizados para la estimación de este ejercicio son los siguientes:

S_0 (susceptibles)	0.7
I_0 (Infectados)	0.3
Delta	0.8
γ	0.2
T	10
Simulaciones	10,000
N	100
σ	0.3
ν	0

Los resultados de las simulaciones para la estimación de la prima considerando los supuestos y parámetros anteriores se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1. Primas de Opciones de cobertura de exceso de proporción de contagiados

σ	0.3				0.3		
ν	0				0.05		
Vencimientos	$K=0.01$	$K=0.10$	$K=0.20$	$K=0.01$	$K=0.10$	$K=0.20$	
100	0.119	0.073	0.013	0.055	0.008	0	
90	0.145	0.096	0.031	0.066	0.013	0	
80	0.175	0.122	0.059	0.084	0.026	0	
70	0.208	0.15	0.087	0.093	0.041	0.005	
60	0.243	0.189	0.11	0.111	0.05	0.01	
50	0.268	0.213	0.157	0.123	0.073	0.021	
40	0.275	0.232	0.168	0.147	0.089	0.028	
30	0.302	0.245	0.193	0.149	0.104	0.042	
20	0.288	0.226	0.167	0.174	0.112	0.053	
10	0.228	0.185	0.123	0.178	0.124	0.066	
Total	2.251	1.731	1.108	1.18	0.64	0.225	

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 1 se observa los dos grupos principales de estimación de opciones de reaseguro utilizando el método Monte Carlo con los parámetros indicados: 1) SIR estocástico ($\nu = 0$) y 2) SIR estocástico con saltos de Poisson ($\nu = 0.3$) para distintos niveles de precio de ejercicio K , y diferentes vencimientos que van desde el periodo de 10 a 100 (que representaría los 10 años).

De los resultados se puede observar que conforme van aumentando los valores de K que es equivalente al aumento del valor de referencia de proporción de individuos contagiados, el valor de la prima de cobertura de la opción call es menor tanto en el caso estocástico como en el estocástico con saltos.

También puede verse de la tabla de resultados del valor de las opciones (Tabla 1), que para el caso de procesos estocástico sin saltos se observa un incremento en los valores de la opción conforme

aumenta las fechas de vencimiento y posteriormente una disminución, es decir, un comportamiento muy parecido a la evolución de los contagios (gráfica 1 a). Por otro lado, en el caso del proceso estocástico con saltos conforme se incrementa el periodo de vencimiento, el valor de la prima va disminuyendo, también parecido al comportamiento de los contagios de la gráfica 1 b.

Otro resultado que se observa es que en todos los casos el valor de las primas del proceso estocástico con salto de Poisson es menor respecto de proceso estocástico sin saltos, tanto en los vencimientos individuales, como en la suma total de las opciones.

Por último, si el valor de las primas estimadas se multiplica por un factor más real del costo promedio y por el total de enfermos y para ciertos valores de referencia y parámetros se podría comparar con el valor real de las primas de características similares obtenidas de métodos actuariales y de esta forma calibrar el modelo para una mejor cobertura.

6. Conclusiones

Con el brote de la pandemia de COVID-19, el efecto directo e indirecto en la economía y las finanzas ha sido en general negativo. Un sector que ha recibido un fuerte impacto durante este periodo es el de los seguros por lo que se plantea que con una contraparte como son los gobiernos o de reaseguradoras, se pudiera apoyar a las compañías aseguradoras ya que mediante la aportación de una prima pudieran cubrirse ante un exceso de contagios y de esta forma cubrirse ante grandes pérdidas.

En el presente trabajo se planteó una alternativa a la estimación de los métodos actuariales para determinar el valor de una prima para cobertura por el exceso de contagios utilizando la teoría de las opciones financieras, pero suponiendo como subyacente la variable del número de contagios que sigue al modelo epidemiológico SIR, adicionando al comportamiento un proceso estocástico y un proceso de saltos con difusión, para realizar la estimación de dicha prima se utilizó el método de simulación Monte Carlo.

De los resultados se puede concluir que entre mayores sean los valores de referencia de proporción de individuos contagiados inicialmente (K), el valor de la prima de reaseguro de la opción propuesta es menor. El resultado tiene consistencia con las opciones financieras tradicionales, ya que ante una perspectiva de una mayor referencia sobre el número de contagios en el vencimiento el costo de la prima sería menor.

El valor de la prima de reaseguro, en ambos casos (proceso estocástico y proceso estocástico con saltos), para los diferentes vencimientos está muy ligado, como era de esperarse, a la evolución del comportamiento de los contagios a lo largo del tiempo. En el caso de la modelación SIR solamente estocástica se observa un incremento en los valores de la opción conforme van incrementándose los vencimientos hasta alcanzar un valor máximo y posteriormente se observa una disminución. Para el caso del modelo estocástico con saltos conforme se aumenta el periodo de vencimiento el valor de la prima va disminuyendo, es decir, en el valor de la estimación de prima es muy importante el vencimiento ya que está en función de la evolución en el tiempo del comportamiento de contagios en la pandemia.

En los casos planteados, el valor de las primas del estocástico con saltos de Poisson son menores respecto solamente estocástico, tanto en los vencimientos individuales, como en la suma

total de las opciones, en otras palabras, hay diferencias importantes en las primas si se consideran o no el proceso de difusión.

Por último, se deja para futuras investigaciones el poder calibrar el modelo con información real de las aseguradoras, ajustando el factor de conversión y los demás parámetros para hacer una estimación mejor de la prima de cobertura.

Referencias

- [1] Antona E. (2020). Oportunidades del Sector asegurador ante el COVID-19. Recuperado de https://nae.global/es/oportunidades-para-el-sector-asegurador-ante-la-covid-19/_el 15 de enero de 2022
- [2] Arnone, M., Bianchi, M. L., Quaranta, A. G., & Tassinari, G. L. (2021). Catastrophic risks and the pricing of catastrophe equity put options. *Computational Management Science*, 18(2), 213–237. <https://doi.org/10.1007/s10287-021-00391-y>
- [3] Aslan, Z., Damnjanovic, I., & Mander, J. B. (2017). Pricing catastrophe equity put options: Financial implications of engineering decisions. *Engineering Economist*, 62(3), 254–271. <https://doi.org/10.1080/0013791x.2016.1186256>
- [4] Babuna, P., Yang, X., Gyilbag, A., Awudi, D. A., Ngmenbelle, D., & Bian, D. (2020). The impact of COVID-19 on the insurance industry. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 17(16), 5766. <https://doi.org/10.3390/ijerph17165766>
- [5] Chang, L.-F., & Hung, M.-W. (2009). Analytical valuation of catastrophe equity options with negative exponential jumps. *Insurance, Mathematics & Economics*, 44(1), 59–69. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.09.009>
- [6] Chicaíza B., Liliana A., y Cabedo S. J., D. (2007). Las opciones financieras como mecanismo para estimar las primas de seguro y reaseguro en el sistema de salud colombiano. *Cuad. Adm.* Bogotá (Colombia), 19(34), 221-236. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/cadm/v20n34/v20n34a10.pdf> el 20 de diciembre de 2021
- [7] Cummins, J. D. D., Lalonde, D., & Phillips, R. D. (2000). The basis risk of catastrophic-loss index securities. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.230044>
- [8] Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1991). Contributions to the mathematical theory of epidemics--I. 1927. *Bulletin of Mathematical Biology*, 53(1–2), 33–55. <https://doi.org/10.1007/bf02464423>
- [9] Lee, J.-P., & Yu, M.-T. (2007). Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds. *Insurance, Mathematics & Economics*, 41(2), 264–278. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.11.003>
- [10] Lesniewski, A., & Lesniewski, N. (2020). Options on infectious diseases. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2003.07992>
- [11] Li, M. Y. (2018). An introduction to mathematical modeling of infectious diseases. Springer International Publishing. Recuperado de <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-72122-4.pdf> el 20 de diciembre de 2021
- [12] Li, H., Liu, H., Tang, Q., & Yuan, Z. (2021). Pricing extreme mortality risk amid the COVID-19 pandemic. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3899660>
- [13] Martínez, F. V. (2001). Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: Una aplicación a los títulos de GCarso. *Estudios Economicos (Mexico City, Mexico)*, 16(2 (32)), 203–226. <http://www.jstor.org/stable/40311447>

- [14] Mendoza E. (2021). Los seguros en México después de la pandemia. Forbes, Recuperado de [https://www.forbes.com.mx/nuestra-revista-los-seguros-en-mexico-despues-de-la-pandemia/_el 5 de enero de 2022](https://www.forbes.com.mx/nuestra-revista-los-seguros-en-mexico-despues-de-la-pandemia/_el_5_de_enero_de_2022).
- [15] Nicola, M., Alsafi, Z., Sohrabi, C., Kerwan, A., Al-Jabir, A., Iosifidis, C., Agha, M., & Agha, R. (2020). The socio-economic implications of the coronavirus pandemic (COVID-19): A review. *International Journal of Surgery (London, England)*, 78, 185–193. <https://doi.org/10.1016/j.ijso.2020.04.018>
- [16] Ortiz, Á. Covid-19 se convierte en el evento más caro del sector asegurador: AMIS. *El Economista*. Recuperado de <https://www.economista.com.mx/sectorfinanciero/Covid-19-se-convierte-en-el-evento-mas-caro-del-sector-asegurador-AMIS-20210930-0117.html> el 22 de diciembre de 2022.
- [17] Sierra Juárez, G. (2021). Modelo de contagio de pandemia a contagio financiero. *Contaduría Y Administración*, 66(5), e294. <http://doi.org/10.22201/fca.24488410e.2021.3368>
- [18] Vaugirard, V. E. (2003). Valuing catastrophe bonds by Monte Carlo simulations. *Applied Mathematical Finance*, 10(1), 75–90. <https://doi.org/10.1080/1350486032000079741>
- [19] Venegas-Martínez, Francisco. (2008). Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre.
- [20] Venegas-Martínez, F. (2001). Temporary stabilization: A stochastic analysis. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 25(9), 1429–1449. [https://doi.org/10.1016/s0165-1889\(00\)00044-0](https://doi.org/10.1016/s0165-1889(00)00044-0)
- [21] Wang, Y., Zhang, D., Wang, X., & Fu, Q. (2020). How does COVID-19 affect China's insurance market? *Emerging Markets Finance and Trade*, 56(10), 2350–2362. <https://doi.org/10.1080/1540496x.2020.1791074>