

La influencia de la vivienda en la aversión al riesgo de portafolios familiares

Gustavo Adolfo Díaz Valencia^{1*}

Universidad Santo Tomás Bogotá, Maestría en Ciencias Económicas

(Recibido 13 de Enero 2017, aceptado 09 de Abril 2017.)

Resumen

El siguiente artículo tiene como fin presentar una propuesta teórica sobre la tenencia de vivienda propia de un hogar, cuando está hipotecada y forma parte del portafolio de inversión; así como su relación con el comportamiento del inversionista frente al riesgo, cuando asume el crédito hipotecario. Para tal fin, desde el punto de vista metodológico se tomará como referencia el marco teórico de media varianza, elaborado por Harry Markowitz y la función de utilidad neoclásica del consumo tipo Cobb-Douglas que establece una relación entre el consumo y la tenencia de vivienda.

Como resultado de este estudio, se propone una tasa de alquiler óptima que incluye el riesgo de mercado y la aversión al riesgo del inversionista, para obtener un portafolio eficiente y concluye que la vivienda propia puede generar algún tipo de rentabilidad o mantener su punto de equilibrio financiero, cuando el inversionista tiene la opción de escoger entre la compra de vivienda o la inversión de otro tipo de activos financieros de renta variable. Una limitación del estudio, fue no considerar la aversión al riesgo del inversionista de manera subjetiva. Finalmente, la originalidad del artículo, radica en incluir la rentabilidad de tener vivienda propia en el portafolio de inversión de los hogares, considerando de manera simultánea la aversión al riesgo y el riesgo de mercado cuando está hipotecada.

Clasificación JEL: E21, G02, G11, G14.

Palabras clave: Portafolio, Vivienda, Riesgo de mercado, Varianza, Utilidad.

The influence of home value in the risk aversion of private investment Portfolios

Abstract

This paper shows a theoretical proposal on the ownership of a household's own home, when it is mortgaged and is part of the investment portfolio, as well as its relation to the investor's risk behavior when they get the mortgage. To this end, Markowitz mean-variance is taken as a theoretical reference along with Cobb-Douglas utility function that states a relation between consumption and home.

As a result, it is concluded that, homeownership can generate some kind of profitability or maintain its financial equilibrium, when the investor has the option of choosing between the purchase of house and the investment in another type of variable financial income. One limitation of the study was not to consider investor risk aversion in a subjective way. The paper originality lays in the inclusion of own house profitability in a household investment portfolio, simultaneously considering risk aversion and market risk when the house is mortgaged.

*Gustavo Adolfo Díaz Valencia. Economista, Magíster en Economía Agraria y Doctor en Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia. Docente-Investigador Maestría en Ciencias Económicas Universidad Santo Tomás, sede Bogotá. Calle 52 No. 7 - 11. gustavodiaz@usantotomas.edu.co. Tel +57 3144307663. Grupo de investigación de Economía y Humanismo Universidad Santo Tomás.

JEL Classification: E21, G02, G11, G14.

Key Words: Portfolio, Home, Market Risk, Variance, Utility.

1. Introducción

La adquisición de vivienda propia es uno de los objetivos fundamentales de muchos hogares en Colombia, dado que garantiza estabilidad, bienestar y representa el patrimonio más importante de su riqueza. Sin embargo, cuando no se disponen de recursos propios para comprarla, la financiación se convierte un mecanismo viable, donde el inversionista asume los costos financieros y los requerimientos que exige el sistema bancario. Cuando el inmueble está hipotecado, su tenencia puede estar afectada por los riesgos de crédito y de mercado cuando la tasa de interés hipotecaria sube, afecta el pago de las cuotas; asimismo también puede incidir otro tipo de riesgos como la pérdida de empleo. Por tal razón, una de las preocupaciones centrales de la teoría económica y en especial de la economía financiera es analizar la relación que existe entre el riesgo de mercado que ocasiona la compra de vivienda propia cuando está hipotecada, con el comportamiento de los inversionistas frente al riesgo.

Dado lo anterior, este artículo propone desde el punto de vista teórico y conceptual, un modelo de portafolio de inversión que incluya la vivienda como un activo de inversión, a partir de la determinación de una tasa de alquiler óptima que mejore la rentabilidad del portafolio, considerando también otros activos financieros riesgosos que estén al alcance de los hogares. Esta pretensión teórica, basada en la teoría de portafolio eficiente de Harry Markowitz, permite integrar el análisis microeconómico que evalúa el comportamiento hacia el riesgo del inversionista cuando compra vivienda, con los riesgos de mercado que se pueden presentar en el mercado inmobiliario cuando es financiada, así como la rentabilidad de tener otros activos financieros riesgosos (acciones, fondos de inversión, fondos de pensiones voluntarias) y no riesgosos (Certificados de Depósito a Término), estableciendo la mejor composición que permita obtener un portafolio de inversión eficiente que les incremente su riqueza.

Por lo anterior, el objetivo del presente artículo es analizar desde el punto de vista teórico, la incidencia de los riesgos de mercado y la aversión al riesgo en los portafolios de inversión de las economías domésticas, sobre la base de la adquisición de vivienda, a partir de dos modelos: el de media varianza de Harry Markowitz (1952) y la función de utilidad tipo Cobb - Douglas. Para tal efecto, se tendrá en cuenta como variable externa el riesgo de mercado y se cruzará la aversión al riesgo del inversionista, con el fin de estimar la rentabilidad eficiente del portafolio minimizando la volatilidad de los rendimientos de estos activos. Por tal razón el artículo se considera esencialmente de revisión documental, pero el aporte teórico se planteará como una extensión del modelo de Markowitz. Este artículo se deriva de una tesis doctoral en Ciencias Económicas denominada: “El riesgo de mercado y su incidencia en los portafolios de inversión de las economías domésticas” (Díaz, 2011)².

2. Aspectos teóricos de la vivienda en los portafolios de inversión

Desde el punto de vista teórico el concepto del riesgo de mercado, es abordado por autores clásicos de la teoría del portafolio eficiente, como Harry Markowitz, William Sharpe y James Tobin entre otros. La teoría básica de la selección de portafolios desarrollada inicialmente por el

²Tesis de doctorado, elaborada por Gustavo Díaz para obtener el título de Doctor en Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia en el año 2011. www.bdigital.unal.edu.co/3560/

Premio Nobel Harry Markowitz (Markowitz, 1952), a comienzos de los años 50, es el pilar que sustenta la distribución de los activos financieros en la composición de un portafolio eficiente que permita obtener una mayor rentabilidad esperada con una menor volatilidad, bajo un enfoque de media varianza, cuya medición es posible, a través del análisis de la varianza histórica del retorno de unos activos financieros riesgosos como son las acciones. Este autor, también demostró que la diversificación de un portafolio no consiste simplemente en el número de acciones que lo conforman, sino también en la correlación de sus retornos.

Dentro de la literatura del portafolio eficiente, los bienes raíces también se incluyen como un activo que incide de manera favorable en la rentabilidad del portafolio de los hogares. Entre los autores más relevantes que desarrollaron esta propuesta, se destacan: Stephen Ross y Randall Zisler (1976) quienes elaboran un artículo denominado “Risk and Return Real State”, donde calculan la rentabilidad de la inversión inmobiliaria en los fondos fiduciarios, para caracterizar su riesgo y la rentabilidad, concluyendo que la mayoría de las familias invierten en bienes raíces mediante la compra de una casa, más que por la compra de acciones en un fondo diversificado (Ross & Randall, 1976). De otra parte William N. Goetzmann (1993) propone en su artículo: “The Single Family Home In The Investment Portfolio” unas regresiones de los precios inmobiliarios para estimar su efecto en los portafolios de inversión de una familia. (Goetzmann, 1993).

Grossman y Laroque Guy (1990) en su artículo “Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods”, presentan un modelo de portafolio óptimo, que incluye los gastos de consumo que genera el pago de servicios de la vivienda y su incidencia en la toma de decisiones de compra y venta de este activo. Sobre esta base, el hogar distribuye su riqueza entre los siguientes activos: la vivienda, un activo libre de riesgo y un número de n activos con riesgo donde hay costos de transacción. Asumen una función de utilidad de la vivienda que incluye un parámetro de aversión relativa al riesgo constante, donde el consumidor elige una media-varianza eficiente del portafolio y los consumidores, determinan una composición de activos riesgosos en la misma proporción (Grossman, 1990).

Marjorie Flavin y Takashi Yamashita (2002) en su artículo “Owner occupied housing and the composition of the household portfolio over the life cycle”, incluyen la compra y venta de la vivienda en el portafolio, con el fin de vender el inmueble para adquirir una casa nueva y de mayor valor, financiando una parte a través de la hipoteca. Para tal efecto, proponen un modelo de riqueza compuesto por activos financieros con riesgo y la vivienda para mejorar la rentabilidad del portafolio.

Según Flavin, la riqueza total del hogar W_t , está distribuida por dos activos uno riesgoso y la vivienda (Flavin & Takashi, (2002)):

$$W_t = X_t l_t + P_t H_t \quad (1)$$

Donde X_t es el vector de cantidades (bienes de consumo no durable), l_t es el vector de los activos en riesgo, H_t la vivienda en pies cuadrados, y P_t el precio por pie cuadrado.

Los retornos de los activos son: la tasa de interés del activo financiero i en el año t definida como $R_{i,t}$ y la tasa real sobre la vivienda como $R_{H,t}$ en el periodo t ; el retorno de los activos es la suma del rendimiento esperado de los activos (μ_i, σ_H) y de un componente estocástico:

$$R_{i,t} = \mu_i + \varepsilon_{i,t} \quad (2)$$

$$R_{H,t} = \mu_H + \varepsilon_{H,t} \quad (3)$$

La matriz de varianzas y covarianzas de los retornos se denota por Ω .

Dividiendo la ecuación (1) por W_t la riqueza se determina la participación de cada activo dentro del portafolio y queda definida como: $1 = h_t + \ell x_t$

Donde: $h_t = \frac{P_t H_t}{W_t}$, es la participación de la vivienda en la riqueza total y

$$x_t = \frac{X_t}{W_t}, \text{ proporción de bienes de consumo no durable sobre la riqueza total.} \quad (4)$$

El portafolio óptimo se calcula a partir de una función de media varianza que maximiza el retorno de estos activos sujeta a una restricción presupuestaria y otra sobre algunos activos financieros.

$$\text{Max}_{x_t} \left\{ (x_u \mu_t + h_t \mu_{Ht}) - \frac{A}{2} [x_t, h_t] \Omega [x_t, h_t]^T \right\} \quad (5)$$

Sujeto a la siguiente restricción: $1 = h_t + \ell x_t$

El objetivo del modelo es maximizar rentabilidad de los activos financieros, a partir de una variable la variable h_t , bajo el supuesto que la familia puede vender la antigua casa para comprar una nueva de mayor tamaño, asumiendo los costos de transacción que implica comprar otra vivienda, H_t . Por lo tanto, se determina la rentabilidad de la vivienda con las siguientes variables: el valor de la casa, los servicios domiciliarios, los impuestos y el mantenimiento. Estas variables se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_t &= (r + d)P_{t-1} + \text{impuesto a la propiedad}^3 \\ COM_t &= dP_{t-1} + (1 + \tau)\text{impuesto a la propiedad} \end{aligned} \quad (6)$$

Donde r es la tasa de interés real, d la tasa de depreciación, y τ es la tasa marginal de impuesto sobre la renta. El valor de alquiler equivale a D_t , el valor de los impuestos a la propiedad pasan a través de los alquileres y la depreciación física (d) se refleja en el valor real de la casa (P_t). Los propietarios gastan en mantenimiento y reparaciones un valor equivalente a la amortización anual de la casa e incluye el pago de impuestos.

$$\text{El retorno de la vivienda } R_{Ht}, \text{ es: } R_{Ht} = \frac{P_t + D_t - COM_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (7)$$

La ecuación 7 establece que el retorno de la vivienda, está en relación directa con su precio y la depreciación, descontando el costo de mantenimiento y el precio del inmueble del periodo

³ En esta ecuación se determina el valor que tendría que pagar si alquila el inmueble e indica que la incidencia de los impuestos sobre la propiedad recae en el propietario, y no puede ser trasladado a los inquilinos.

anterior. Es decir, esta rentabilidad se incrementa cuando el precio y su depreciación aumentan y disminuye cuando el precio del periodo anterior es mayor que el actual, es decir cuando ha disminuido su valorización.

En este enfoque de media-varianza, la proporción del valor de la vivienda dentro de la riqueza, h_t cuyo valor varía durante el ciclo de vida es endógena. Los autores de acuerdo a una investigación empírica aplicada a una encuesta de hogares en la PSID (Panel Study of Income Dynamics) durante el periodo 1968-1992 (1917hogares) (Flavin & Takashi, (2002), pág. 350); concluyen que existe una relación entre el ciclo de vida y la composición del portafolio, donde una persona mayor a 40 años prefiere invertir más en bonos y títulos que en comprar vivienda nueva, caso contrario sucede cuando la persona es joven. Este modelo se puede replicar para el estudio del portafolio de inversión cuando los hogares compran vivienda, y permite evaluar como la edad del jefe del hogar, incide en su aversión al riesgo y en su percepción sobre el riesgo de mercado, cuando efectúa este tipo de inversiones.

En la tabla que se presenta a continuación, se resumen las principales diferencias entre los aportes teóricos propuestos por Harry Markowitz a partir de la teoría clásica del portafolio eficiente y los de Marjorie Flavin y Takashi Yamashita, quienes incluyen la vivienda dentro del portafolio eficiente.

Tabla 1. Resumen comparativo de algunos modelos teóricos

Modelo de Harry Markowitz 1952	Modelo de Flavin Marjorie and Takashi Yamashita 2002
--------------------------------	--

<p>Markowitz (1952) propone un modelo de media-varianza que optimiza el valor esperado del rendimiento del portafolio. Para tal efecto, define el rendimiento como:</p> $R = \sum R_i X_i$ <p>Donde R_i es el rendimiento del activo i, que representa la variable aleatoria y X_i la cantidad del activo i no es una variable aleatoria, porque es determinada por el inversionista y N el número de activos.</p> <p>El valor esperado del portafolio es:</p> $E = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i$ <p>La varianza está definida como:</p> $V(R) = \sum_{i=1}^N X_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij}$ $V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} X_i X_j$ <p>El inversionista maximiza la rentabilidad esperada del portafolio a partir de la siguiente expresión:</p> $\text{Max} E(R_p) = \sum_{i=1}^N X_i E(R_i)$ <p>Sujeto a:</p> $\text{s. a. } \sum_{i=1}^N X_i = 1$ $X_i \geq 0 \text{ para todo } i$ <p>para todo $i = 1, 2, \dots, N$ activos.</p> $R = \sum X_i R_i$ <p>Donde R_i es independiente de X_i</p> <p>Markowitz dice que los inversionistas tienen una conducta racional al momento de seleccionar su cartera de inversión y buscan obtener la máxima rentabilidad sin asumir demasiados riesgos. (Markowitz, Portfolio Selection, 1952).</p>	<p>Este modelo considera que la riqueza total del hogar W_t, está definida como la suma de activos riesgosos y la vivienda:</p> $W_t = X_t l + P_t H_t$ <p>Donde: $h_t = \frac{P_t H_t}{W_t}$, representa la participación de la vivienda en la riqueza total y,</p> <p>$x_t = \frac{X_t}{W_t}$ representa la proporción de bienes de consumo no durable sobre la riqueza total</p> <p>El portafolio óptimo se determina partiendo del principio que el inversionista maximiza el retorno de sus activos, a partir de una función de media que incluye la vivienda, sujeto a dos restricciones, una presupuestal y la otra sobre préstamos hipotecarios.</p> $\text{Max}_{x_t} \left\{ (x_t \mu_t + h_t \mu_{H_t}) - \frac{A}{2} [x_t, h_t] \Omega [x_t, h_t]^T \right\}$ <p>Sujeto a:</p> $1 = h_t + \ell x_t$ <p>Restricción sobre préstamos hipotecarios</p> $-h_t \leq x_{n,t} \leq 0$ <p>Restricciones de no negatividad sobre otros activos financieros.</p> <p>El modelo maximiza la tenencia de activos financieros, a partir de una variable de estado h_t (Flavin & Takashi, (2002), pág. 347).</p>
--	---

Fuente: elaborado por el autor. (Diaz, 2011, pág. 85)

2.1 Breve estado del arte sobre la incorporación de la vivienda en la composición de los portafolios de los hogares.

Durante las últimas dos décadas se han publicado algunos artículos que relacionan la inclusión la vivienda en los portafolios de inversión de los hogares o destacan la importancia de los mismos en sus ganancias. En el año 2005 se publica un artículo denominado: "Portfolio Choice in the Presence of Housing", donde muestra que la inversión en vivienda juega un papel crucial en la explicación de los patrones que definen la riqueza y en el nivel de las reservas o recursos en la composición de la cartera. Debido a la inversión en vivienda requiere utilizar un elevado gasto de los ingresos, las personas más jóvenes y las más pobres tienen una riqueza financiera limitada para invertir en otro tipo de activos como las acciones, lo que reduce los beneficios de la participación en el mercado de acciones. (Cocco J. F., 2005)

Un estudio efectuado para la CEPAL en 1999 denominado: “La vivienda como activo de los hogares”, considera que la vivienda constituye uno de los principales activos con que cuentan los hogares, dado que el gasto en vivienda representa una proporción considerable del presupuesto familiar entre los arrendatarios, al tiempo que implica un ahorro igualmente importante cuando se dispone del bien en propiedad o usufructo. En este sentido, las formas de acceso a la vivienda pueden ser examinadas en sus efectos positivos o negativos, dentro del portafolio de recursos que movilizan los hogares para el bienestar (Fuentes, 1999).

Zhang (2005) analiza la dinámica entre la adquisición de vivienda y el consumo en la elección del portafolio de un inversionista, cuando recibe un ingreso laboral estocástico y se enfrenta al riesgo de la vivienda por las garantías que exigen los bancos y los gastos de financiación que implica el valor de la hipoteca, para tal efecto utilizan una función de utilidad tipo Cobb –Douglas (Zhang, 2005).

Un capítulo de libro denominado “The Portfolio Management Process and the Investment Policy Statement” y publicado en el año 2007 (Maggnin, 2007), considera que la conformación del portafolio está integrado por una serie de etapas a través de las cuales se puede lograr la combinación de activos rentables para mantener un adecuado del portafolio. En la definición del portafolio se toman en cuenta unos procesos como: los objetivos y restricciones de la inversión, las estrategias y desarrollos, la decisión sobre la composición de los activos; la medición y evaluación de las características del portafolio; el monitoreo de las condiciones del mercado y se su incidencia en la redefinición del portafolio.

Un artículo denominado: “Los fondos de inversión inmobiliaria y la producción privada de vivienda en Santiago de Chile: ¿Un nuevo paso hacia la financiarización de la ciudad?” (Cattaneo, 2011), tiene como objetivo, analizar el papel jugado por los fondos de inversión inmobiliaria chilenos en la producción de los espacios residenciales de Santiago. Por medio del examen de su portafolio de colocaciones habitacionales, subraya su importancia en el financiamiento de la edificación privada de vivienda. Para definir estos programas, los fondos han privilegiado las tipologías y las localizaciones que se adecuan mejor a sus temporalidades y a sus lógicas de funcionamiento. De este modo, han tenido influencia directa sobre en la verticalización de la ciudad, y en los procesos de renovación de los barrios céntricos considerando el fenómeno de la financiarización de las grandes metrópolis en el sector habitacional.

Recientemente Chetty Raj y Lázlo Sándor (2016), escriben un documento sobre: “El efecto de la vivienda en la selección del portafolio”, donde caracterizan los efectos de la vivienda en las carteras, diferenciando los efectos de la equidad de la vivienda y la deuda hipotecaria. Aíslan la variación exógena del patrimonio neto y las hipotecas mediante el uso de diferencias en los precios de las viviendas y las elasticidades de la oferta de vivienda como instrumentos de los mercados de la vivienda, concluyen que un incremento en el valor de la propiedad (manteniendo el valor de la vivienda constante) reducen la tenencia de acciones, mientras que los aumentos de los precios de la vivienda aumentaría la equidad de la vivienda (Chetty, Sándor, & Szeidl, 2016).

3. Propuesta de modelos del portafolio de inversión de los hogares

3.1 Intuición económica

Este estudio se basa en la realidad que afrontan muchos hogares de estratos medio y bajo y es la necesidad de comprar vivienda propia para asegurar su bienestar. Una de las maneras de obtener este bien es mediante la financiación al sistema bancario con intereses hipotecarios, ajustados de acuerdo al comportamiento de la inflación. La tenencia de vivienda propia se convierte en muchos casos en el único activo y fuente de riqueza de los hogares, que genera cierta rentabilidad y cuyo valor esperado se acerca a cero cuando es financiada.

Cuando la vivienda es financiada, el pago de las cuotas puede estar afectada por el riesgo de mercado es decir por la volatilidad de la tasa de interés cuando está atada a la inflación, lo cual eleva el valor de las cuotas y compromete la tenencia del inmueble; para tal fin cuando se toma en cuenta la aversión al riesgo de los inversionistas y se espera que durante los pagos del crédito, tomen las precauciones necesarias para pagar el inmueble, optando por su alquiler. Este mecanismo permite a muchos inversionistas garantizar el pago de la obligación hipotecaria y reducir la exposición al riesgo que genera la volatilidad del mercado de las tasas de interés. Por tal razón, se espera que a medida que aumente la aversión al riesgo del inversionista, reduzca el riesgo de mercado efectuando oportunamente el pago de la obligación. Por lo tanto, se espera demostrar que la aversión al riesgo del inversionista atenúe el riesgo de mercado y genere una rentabilidad si decide alquilar el inmueble, al incluirla como un activo importante en su portafolio.

Los modelos que se presentarán en este artículo, toman como referencia el modelo de equilibrio del mercado de activos financieros, aplicado en la teoría del portafolio eficiente desarrollado por James Tobin, Harry Markowitz y por William Sharpe en la década de los años cincuenta. Mediante este modelo se busca generar un portafolio eficiente que demuestre como la tenencia de vivienda genera alguna rentabilidad al inversionista, cuando se compara con otro activo financiero. El objetivo es calcular el valor esperado óptimo del portafolio cuando se incluye la compra de vivienda, para tal efecto, los conceptos de retorno y volatilidad juegan un papel determinante en la selección de los activos. Esta teoría ha sido utilizada para estimar modelos de optimización de las carteras y su incidencia en la toma de las decisiones de los inversionistas.

El siguiente apartado tiene por objeto determinar dos clases de modelos: el primero a partir de una variante del modelo media varianza propuesto por Harry Markowitz y el siguiente un modelo a partir de la función de utilidad tipo Cobb-Douglas. Para tal efecto se considerarán dos grupos de hogares: los que tienen capacidad de ahorro y están pagando su vivienda al sistema financiero y aquellos que están pagando la vivienda mediante una hipoteca pero no tienen capacidad de ahorro. De otra parte este enfoque se contrastará un modelo basado en la función de utilidad tipo Cobb Douglas, que incorpora como activo la rentabilidad de la vivienda y el gasto en consumo de los hogares para maximizar esta función tomando como restricción el ingreso disponible y considerando la aversión al riesgo en la rentabilidad de vivienda y el ahorro.

3.2 Supuestos teóricos:

- a) Los hogares tienen aversión al riesgo ($-A$) y maximizan la utilidad esperada de su riqueza al final del periodo.
- b) Existe un activo libre de riesgo
- c) Los inversionistas pueden solicitar préstamos.

El hogar asume tiene un comportamiento frente al riesgo denominado aversión al riesgo y toma en cuenta el riesgo de mercado cuando el precio de las tasas de interés del mercado cambian.

- d) El crédito, el ingreso y el empleo son variables que determinan la compra de vivienda.
- e) La riqueza de los hogares está conformada por activos financieros y por la vivienda.

3.3 Variables que definen el modelo de media varianza

Las variables que definen el modelo de portafolio basado en el enfoque de media - varianza son:

- El riesgo de mercado: “se deriva de cambios en el precio de los activos y pasivos financieros (o volatilidades) y se mide a través de cambios en el valor de las posiciones abiertas”(Jorion, 2003, pág. 33). También se define como la pérdida que puede sufrir un inversionista en los mercados financieros, debido a la diferencia en los precios que se registran en el mercado por cambios en las variables macroeconómicas o en los movimientos de los llamados factores de riesgo (tasas de interés, tipos de cambio y precio de las acciones entre otros).
- El rendimiento del portafolio se define como: “una combinación lineal de los rendimientos de los activos subyacentes, donde las ponderaciones se determinan por los montos relativos invertidos al inicio del periodo”(Jorion, 2003, págs. 159-160).
- La varianza se define como: “la suma ponderada de las desviaciones respecto a la media al cuadrado”(Jorion, 2003, pág. 85).
- Aversión al riesgo, “para cualquier agente averso al riesgo, la utilidad que le reporta el valor esperado de un juego es mayor que la utilidad esperada de jugar. Si además el juego es de suma cero, sabemos que ese individuo averso al riesgo no jugará ese juego; prefiere su riqueza inicial a jugarlo”.(Marin & Rubio, 2001, pág. 762)
- Activos: “son bienes que generan flujo de servicios a lo largo del tiempo, estos pueden ser de consumo como la vivienda o de dinero. Los activos que dan lugar a flujos de dinero se llaman activos financieros”. (Varian, 2010, pág. 203)

4. Metodología

Desde el punto de vista metodológico esta propuesta teórica toma como referencia los modelos de media varianza de Harry Markowitz y el modelo de Marjorie y Flavin y se puede considerar como un modelo de extensión de la teoría del portafolio eficiente, que incluye como activos la rentabilidad de tener vivienda y la de otros activos en los cuales los hogares pueden invertir (acciones, fondeos de pensiones voluntarias, activos de renta fija), con el fin de evaluar la incidencia que genera el riesgo de mercado en la volatilidad de estos activos y su relación con la aversión al riesgo del inversionista, y a su vez determinar una tasa de alquiler óptima, que mejore la rentabilidad del portafolio de los hogares.

4.1 Una variante del modelo de media varianza de Harry Markowitz

En este punto se propone una función de utilidad esperada del portafolio de inversión que relaciona el riesgo de mercado y la aversión al riesgo representada a través de una constante A , cuyos valores son positivos. Los modelos se enuncian a continuación.

4.1.1 Aspectos generales del modelo de portafolio para aquellos hogares que tienen crédito de vivienda y capacidad de ahorro

Se propone este modelo como una extensión de la teoría del portafolio eficiente de Harry Markowitz que toma como referencia los parámetros de media y varianza de los activos financieros e incluye la aversión al riesgo (A) del inversionista. Los inversionistas eligen una distribución óptima de su riqueza w_0 , entre un activo con tasa de interés libre de riesgo, N activos con riesgo y están sujetas a dos restricciones: una presupuestaria y la proporción de riqueza distribuidos en activos riesgosos.

Dado que i_0 es la tasa de interés de los activos con bajo de riesgo, z son los retornos de los activos expuestos al riesgo y $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ el porcentaje de participación de los activos dentro del portafolio, entonces el valor de la riqueza al final del período está dada por: $w_1 = w_0(1 + i + a'z)$.

La función de utilidad esperada de w_1 es (Nabcini, 2008):

$$E[U(w)] = E(w_1) - \frac{A}{2} var(w_1) \quad (8)$$

El modelo define dos parámetros la media $\mu = E(w_1)$ y la desviación estándar. La utilidad esperada del portafolio es: $E[U(\alpha)] = (1 + i_0)w_0 + w_0 \left(a'\mu - \frac{A}{2} a'\Omega a \right)$ (9)

Donde $(1 + i_0)w_0$ es la parte del portafolio que incluye un activo libre de riesgo y la otra parte es la composición de activos expuestos al riesgo de mercado, Ω la matriz de varianzas y covarianzas del rendimiento de los activos. El problema de maximización se formaliza como:

$$\max_{a \in \mathbb{R}_+^N} f \left(a'\mu - \frac{A}{2} a'\Omega a \right) \quad (10)$$

Donde:

N : son los activos con riesgo.

a : es el vector de participaciones

A : Índice de aversión al riesgo

Ω : matriz de varianzas y covarianzas del rendimiento de los activos.

\mathbb{R}_+^N : es el vector de participaciones pertenecen al conjunto de N activos con riesgo y tienen valores reales positivos \mathbb{R} .

El modelo está sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^N a = 1 \quad (11)$$

$$S_t - Amortización_t \geq 0 \quad (12)$$

El ahorro bruto S_t se define como la diferencia entre el ingreso disponible Y_{dt} y el consumo C_t de la siguiente manera: $S_t = Y_{dt} - C_t$ (13)

La riqueza de la familia en el período t , W_t está conformada por el salario Y_t y riqueza no laboral S_t (Ahorros en el sistema financiero, rentas y transferencias), H_t es la vivienda y M_t el valor de la hipoteca.

$$W_t = W_0 + S_t + H_t - M_t \quad (14)$$

La condición de primer orden de la ecuación (10) es:

$$\begin{aligned} V'(a^*) &= E(u) = 0 \\ 0 &< a^* < 1 \end{aligned}$$

El objetivo del modelo es incorporar la vivienda como una proporción del valor total del portafolio, para estimar sus valores óptimos que maximizan su utilidad, tomando como referencia la varianza de un activo financiero riesgoso y la varianza de la rentabilidad de la vivienda a través de su tasa de alquiler r . El modelo permitirá analizar el comportamiento de los hogares frente al riesgo de mercado y su incidencia en las decisiones de inversión que definen la composición de su portafolio eficiente.

4.1.2 Un modelo económico para propietarios que poseen vivienda financiada y tienen capacidad de ahorro

En este modelo, el hogar invierte su riqueza en la adquisición de activos riesgosos y en activos financieros libres de riesgo a partir de la información que suministra el mercado sobre el promedio de sus precios.

La riqueza total W_t de los hogares se define como la sumatoria del valor total de los ahorros y el valor total de la casa: $W_t = S_t + P_t H_t$ (15)

S_t : representa la cantidad de Ahorro que posee la familia durante el periodo t , la cual recibe una tasa de interés libre de riesgo en el sistema financiero a través de cuentas de ahorro, depósitos a término, bonos u otros activos.

Los gastos corrientes C_t son los siguientes: alimentos, bebidas y tabaco, salud, transporte y comunicaciones, recreación, educación bienes y servicios personales y otros pagos.

El ahorro total de los hogares en el período t se define como:

$$S_t = Y_{dt} - C_t - amort_t \quad (16)$$

$P_t H_t$: representa el valor de la vivienda estimado por el hogar donde los propietarios del inmueble están efectuando los pagos de la hipoteca, con el sistema financiero o con una cooperativa.

La amortización $amort_t$ corresponde al valor de la cuota, la cual incluye el pago a capital y los intereses y los rendimientos de ambos activos son:

$$R_{st} = \mu_s + \varepsilon_s \text{ Rentabilidad del ahorro, invertida en el sistema financiero.} \quad (17)$$

$R_{ht} = \mu_h + \varepsilon_h$: rentabilidad de la vivienda.

La rentabilidad total esperada del portafolio es: $\tilde{\mu} = s_t \mu_{st} + h_t \mu_{ht}$

$$\text{La rentabilidad de la vivienda está definida como: } R_{ht} = \frac{\text{Valor del alquiler}}{\text{Valor del inmueble}} \quad (18)$$

Otra forma de calcular el retorno de vivienda si el hogar no decide alquilar la vivienda es la siguiente: $R_{ht} = \frac{P_t - Gams_{t-1} - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ (19)

$Gams_{t-1}$: gastos de administración y mantenimiento de la vivienda en el período t .

La tasa de interés real después de impuestos que permite calcular la rentabilidad de la viviendas:

$$rdt = \frac{1 + (1 - \tau) i_s}{1 + \pi_t} \quad (20)$$

i_s : la tasa de interés nominal en el periodo s que se paga por adquirir la vivienda está dada en términos de la UVR.

τ : tasa de impuesto predial, calculada como el porcentaje estimado sobre el valor que los hogares suministraron en la encuesta de hogares.

π_t : tasa de inflación del año t calculada con base en el IPC.

$$\text{La matriz de covarianzas } \Omega \text{ de los retornos dada como: } \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{sh} \\ \sigma_{hs} & \sigma_h^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Dividiendo la ecuación (15) por W_t , se obtiene la participación de los activos en la riqueza de las familias: $1 = h_t + s_t$ (22)

Dónde:

$h_t = \frac{P_t H_t}{W_t}$: es la participación del valor de la vivienda en la riqueza total.

$s_t = \frac{S_t}{W_t}$: es la participación del ahorro total en la riqueza total.

μ_{st} = Media de la tasa de ahorro en el período t

μ_{ht} = Media de la tasa de alquiler de la vivienda en el período t .

El problema de maximización es (Flavin & Takashi, (2002), págs. 345-362):

$$\text{Max}_w \left\{ s_t \mu_{st} + h_t \mu_{ht} - \frac{A}{2} [s_t, h_t] \Omega [s_t, h_t]^T \right\} \quad (23)$$

Sujeto a dos restricciones:

$$\begin{aligned} 1 &= h_t + s_t \\ s_{it} - a_t &\geq 0 \end{aligned}$$

La segunda restricción corresponde al ahorro, donde i equivale al número de activos.

En esencia el modelo consiste en maximizar la riqueza w sobre los activos de los hogares, condicionado al valor de s_t y h_t . El portafolio óptimo está basado en el supuesto que el hogar maximiza una función de media y varianza de la rentabilidad esperada de los dos activos, sujeto a unas restricciones y al riesgo que genera la inversión de la vivienda.

Dados los valores s_t, h_t la media y la varianza de la frontera eficiente, dependen del valor de la variable estado h_t y del grado de aversión al riesgo que asuma el hogar.

La preferencia al riesgo se refleja en el parámetro A que indica el grado de aversión al riesgo, donde $A > 0$, pero disminuye cuando $A \rightarrow 0$.

La media total del portafolio es: $\bar{\mu} = s_t \mu s_t + h_t \mu h_t$ (24)

La varianza del portafolio es: $\sigma^2 = [s_t, h_t] \Omega [s_t, h_t]^T$ (25)

El portafolio óptimo se ubica en el punto de tangencia en el límite de la frontera del conjunto de carteras eficientes con la pendiente de la curva de indiferencia, determinada por el grado de aversión al riesgo del inversionista. Se espera que entre mayor sea la aversión al riesgo, las familias comienzan a pagar sus hipotecas casi inmediatamente. La restricción de que el valor de la hipoteca no puede exceder el valor de la casa, es obligatoria para determinar el portafolio eficiente.

Dada la estimación de la rentabilidad esperada de los activos que componen el portafolio, el modelo predice que los inversionistas prefieren invertir en activos inmobiliarios frente a otros activos riesgosos, para tal efecto se define una tasa de ahorro óptima (s^*) que minimiza la varianza del portafolio y está dada por la siguiente ecuación: (Diaz, 2011, pág. 72):⁴

$$s^* = \frac{[\mu_s - \mu_h + (\sigma_h^2 - \sigma_{sh})A]}{A(\sigma_h^2 - 2\sigma_{sh} + \sigma_s^2)} \quad (26)$$

El nivel de ahorro óptimo calculado (Ecuación 26), depende inversamente del nivel de aversión al riesgo A y directamente de la diferencia entre la media de la tasa de ahorro y la media del alquiler de la vivienda, así como el efecto que genera el producto de la aversión al riesgo de los hogares con la diferencia entre la varianza de la vivienda y la covarianza entre las tasas de interés de los activos financieros y la tasa de alquiler de la vivienda.

Si la diferencia entre la media de la tasa de ahorro y la de la tasa de alquiler aumenta entonces el porcentaje de ahorro óptimo es mayor. Este resultado demuestra que el inversionista realmente estará motivado por una atractiva tasa de interés que ofrezca el sistema financiero. Es de anotar que la volatilidad de la tasa de ahorro se constituye en un factor que afecta negativamente la

⁴Michael Fratantoni (1996) estudio los efectos de la vivienda en riesgo dado el compromiso de pago de la hipoteca combinado con los ingresos laborales inciertos en un modelo de simulación. En su modelo, la proporción de los activos en riesgo en el total de la riqueza es mayor para los hogares jóvenes, que para las personas cerca de la jubilación.

Joaquín Cocco (1998) también utiliza la simulación para resolver un modelo de ciclo de vida-riesgo con la renta laboral para la óptima explotación de la vivienda y los activos financieros.

proporción de ahorro óptimo en el portafolio, es decir si la volatilidad aumenta entonces disminuye la cuota de ahorro del inversionista.

La proporción óptima de la rentabilidad de vivienda es:

$$h^* = 1 - s^* \quad (27)$$

$$\text{Por lo tanto } s^* + h^* = 1 \quad (28)$$

4.1.3 Modelo para hogares que no tienen capacidad de ahorro y su riqueza es la vivienda

Este modelo también se propone como una extensión del Modelo de media varianza de Markowitz, pero toma en consideración solo la vivienda como el único activo del portafolio de este tipo de inversionistas, donde la riqueza (W_t) se basa en el flujo neto de la casa que se define como la diferencia entre el valor actual de la casa y el valor de la hipoteca:

$$W_t = P_t H_t - M_t \quad (29)$$

La familia invierte en su propia vivienda, pero la hipoteca al sistema financiero en el período t y se define como M_t con la siguiente condición:

$$M_t \leq (1 - m)P_t H_t \forall t \quad (30)$$

Se asume que el inversionista puede pedir prestado hasta el valor de la casa menos el pago de la cuota inicial, la cual se representa como una proporción (m) del valor de la casa.

El ingreso disponible del hogar se distribuye entre el gasto corriente y el pago de la hipoteca:

$$Y_t = P_t C_t + i_t m P_t H_t \quad (31)$$

Y_t : Ingreso disponible del hogar

$P_t C_t$: gasto corriente.

i_t : tasa de interés de la Hipoteca.

$M_t m P_t H_t$: valor de la hipoteca.

Como resultado de éste modelo, se define una tasa de rentabilidad de tener vivienda propia a partir de la varianza de la tasa de interés hipotecaria, la aversión al riesgo y el comportamiento de los hogares frente al cambio de los parámetros anteriormente mencionados.

4.1.4 Un modelo para propietarios de la vivienda, pero la pagan al sistema financiero y no tienen capacidad de ahorro

Este grupo presenta una mayor exposición al riesgo por cuanto cualquier incremento en la tasa de interés de los préstamos de vivienda afecta sensiblemente su riqueza, donde el mayor activo del portafolio es la casa.

El valor de la casa generalmente excede el patrimonio neto del hogar, que se financia a través del sistema financiero con un contrato de hipoteca. Por lo tanto, la vivienda representa el 100% de la

riqueza; sin embargo, un aumento en la tasa de interés del crédito puede incrementar el pago de las cuotas, durante los años de financiación.

Cuando el hogar decide adquirir una hipoteca M para financiar la compra de vivienda, es necesario considerar el ingreso laboral como el salario y el riesgo asociado a la incertidumbre de conservar el empleo, que previene a los prestamistas de otorgar préstamos cuando el ingreso de éstos hogares se afecta por el desempleo (Campbel, 2003).

El valor de una hipoteca M (i, H, B, K), depende de las tasas de interés, i , el valor de la propiedad, H , el saldo pendiente, B la edad de los préstamos, K , y algunos otros parámetros (Deng & Quigley, 2000, pág. 278). Para éste caso, se considera que la hipoteca representa un porcentaje del valor total de la vivienda y no debe superar el 70% del valor total.

De otra parte, se define una función de la utilidad de tener vivienda (dada como la diferencia entre el valor actual de la casa y el valor actual de la hipoteca), para determinar una tasa de rentabilidad óptima cuando el propietario decide alquilar el inmueble, para analizar el comportamiento de los inversionistas cuando consideran la volatilidad de la tasa de interés hipotecaria y la aversión al riesgo, y su incidencia en la rentabilidad.

Por lo tanto, la utilidad neta de la casa se define como la diferencia entre el valor actual del alquiler y el valor actual de la hipoteca M_t .

El valor actual de la hipoteca es (Marin & Rubio, 2001, págs. 50,51):

$$M_t = \frac{C_t}{i_t} \left(1 - \frac{1}{(1+i_t)^n} \right) \quad (32)$$

El valor actual del alquiler es: $H_t = \frac{\text{Alquiler}_t}{i_t} \left(1 - \frac{1}{(1+i_t)^n} \right)$ (33)

Donde:

C_t : el valor de la cuota anual, i_t la tasa de interés nominal y n el número de años estimado para financiar la vivienda.

i_t : tasa de interés de la hipoteca.

i'_t : tasa de interés de un activo de renta fija.

La utilidad de la casa está definida como:

$$W_t = H_t - M_t \quad (34)$$

Dividimos esta ecuación por W_t para determinar la proporción de la casa y la hipoteca dentro de la utilidad total.

$$1 = h_t - m_t \quad (35)$$

$$h_t = 1 + m_t \quad (36)$$

Donde:

$h_t = \frac{P_t H_t}{W_t}$: valor actual del alquiler de la vivienda sobre el flujo neto de la casa.

$m_t = \frac{M_t}{W_t}$: proporción del valor total de la casa que está hipotecado, sobre el flujo neto de la casa.

μ_{it} : promedio de la tasa de interés del crédito de vivienda durante el periodo t .

μ_{rt} : promedio de la tasa de alquiler estimada por los hogares durante el periodo t .

$R_{it} = \mu_i - \varepsilon_{it}$,

$$R_{rt} = \mu_r - \varepsilon_{rt}$$

La rentabilidad de la porción de la vivienda pagada con recursos propios es:

$$r_t = \frac{\text{Valordelalquilerdelacasa}}{\text{Valortotaldelacasa}} \quad (37)$$

La porción de la vivienda financiada es decir la tasa de hipoteca está afectada por la tasa de interés nominal i_t , que financia el valor del crédito hipotecario. En este caso se considera sólo el pago de la tasa de interés, dado que el pago a capital es la inversión que efectúan los hogares en la adquisición de vivienda y es equivalente a su ahorro.

El valor óptimo de la vivienda se basa en el supuesto de que el hogar maximiza el valor de su riqueza, a partir de una función de media varianza, a partir la tasa de interés del crédito y del alquiler de la vivienda. El objetivo es determinar los efectos de la variación de la tasa de interés hipotecaria y la aversión al riesgo sobre la rentabilidad de la vivienda.

El problema de los hogares es:

$$\max U_w \left\{ (\mu_{rt} h_t - \mu_{it} m_t) - \frac{A}{2} [(h_t, m_t) \Omega (h_t, m_t)^T] \right\} \quad (38)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$Yd_t = p_{ct} C_t + m_t H_t i_t \quad (39)$$

$$1 = h_t - m_t$$

Donde:

μ_{rt} : media de la tasa de alquiler de la vivienda.

μ_{it} : media de la tasa de interés de la hipoteca.

$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{ri} \\ \sigma_{ir} & \sigma_i^2 \end{pmatrix}$: representa la matriz de varianzas y covarianzas

Yd_t : ingreso disponible en el periodo t

p_{ct} : precio de los bienes de consumo, están dados y son iguales a 1.

C_t : gasto corriente de los hogares en el periodo t .

A : aversión al riesgo, disminuye cuando A tiende a cero.

σ_i^2 : varianza de la tasa de interés.

σ_r^2 : varianza de la tasa de alquiler de la casa.

La ecuación (38) trata un problema de decisión en tiempo discreto, puesto que el agente debe ejecutar una decisión cada vez que vence un pago y la restricción (39) describe la distribución del ingreso disponible de los hogares en consumo y pago de intereses de la hipoteca.

$P_t H_t$: Valor de la vivienda.

m_t : Porcentaje de vivienda que está financiada por el sistema financiero en Colombia equivale al 70% del valor total del inmueble.

Aplicando el lagrangiano a la función de utilidad de la casa tenemos la siguiente ecuación (Diaz, 2011, pág. 77):

$$\mathcal{L} = h_t \mu_{rt} - m \mu_{it} - \frac{A}{2} [h^2 \sigma_r^2 + 2hm \sigma_{ri} + m^2 \sigma_i^2] - \lambda (Yd_t - p_{ct} \bar{C}_t - \mu_{it} m_t H_t)$$

$$r_t^* = Am [\sigma_p^2 + \sigma_{ir}] \quad (40)$$

La anterior ecuación (40) muestra que la rentabilidad del alquiler de la vivienda depende directamente de la aversión al riesgo, la volatilidad de la tasa de interés del crédito hipotecario, la volatilidad de la tasa de alquiler y la covarianza entre las dos tasas. Un aumento de la aversión y la volatilidad incide sustancialmente en la rentabilidad de la vivienda. Cuando el inversionista, disminuye su aversión al riesgo, dado un nivel de volatilidad en la tasa de interés hipotecaria, la rentabilidad de la vivienda disminuye y prefiere invertir su portafolio en otro tipo de activos más rentables.

Una mayor volatilidad de la tasa de interés⁵ afecta sensiblemente el pago de la cuota hipotecaria, incrementando el riesgo de no pago hasta causar la pérdida del inmueble. En Colombia la Corte Constitucional a través del artículo 51, de 1991⁶ determinó que la vivienda es un bien mérito y por tanto no se debe dejar al mercado la fijación del costo de su financiamiento, ni las condiciones en las cuales se otorgan los cuales los créditos, por lo que sobre el mismo deben existir controles y cobrarse las menores tasas del mercado y menores aún para la vivienda de interés social.

5. El modelo de utilidad del portafolio tipo Cobb- Douglas

⁵ En Colombia las cuotas de los créditos hipotecarios se definen con base en dos sistemas de amortización, el pago en pesos corrientes y el pago en unidades de crédito denominada UVR (Unidad de valor real), cuyo valor en pesos se determina a partir de la tasa de inflación del IPC como tope máximo. Si la variación en el comportamiento de la inflación es considerable, el valor en pesos de la UVR aumentará de la misma manera; por el contrario, si dicha variación es poca, el aumento del valor en pesos de la UVR será menor. ICAV (Instituto Colombiano de Ahorro y Vivienda).

⁶ Artículo 51. "Todos los colombianos tienen derecho a vivienda digna. El Estado fijará las condiciones necesarias para hacer efectivo este derecho y promoverá planes de vivienda de interés social, sistemas adecuados de financiación a largo plazo y formas asociativas de ejecución de estos programas de vivienda". Constitución Política de Colombia 1991.

Este modelo se basa en una función de producción de tipo Cobb-Douglas, la cual es un caso particular de la función CES (elasticidad de sustitución constante) y se define como un tipo de función de producción que muestra que la elasticidad de sustitución es una constante θ , la cual representa el porcentaje de distribución del ingresos en gasto de amortización en pago de la vivienda y en gastos corrientes, cuyas elasticidades muestran el nivel de preferencia de los hogares hacia los gastos, lo que permite demostrar si las preferencias de los hogares se inclinan más hacia la amortización de la vivienda para aumentar su utilidad total. De igual manera esta función aplica para establecer la preferencia de los hogares por alquilar el inmueble o ahorrar en el sistema financiero y su incidencia en la función de utilidad del hogar. Estas funciones se integran de manera exponencial al riesgo de mercado (A) como coeficiente de aversión relativa al riesgo.

Este método de maximización de utilidad toma como referencia un modelo de preferencia de función exponencial, $U(c) = b_1 c^{b_2}$ con $b_1 > 0$ y $0 \geq b_2 \leq 1$. El índice de aversión al riesgo será (Perali, 2000):

$$\text{El riesgo absoluto } RA = \frac{b_2 - 1}{c} \text{ y el riesgo relativo } RR = 1 - b_2 \quad (41)$$

$$\text{la primera derivada es } R' = \frac{b_2 - 1}{c} \text{ y } R'' = 0 \quad (42)$$

La aplicación del modelo exponencial es la siguiente:

$$U(w)_t = \frac{(S_t^{1-\theta} H_t^\theta)^{1-A}}{1-A} \quad (43)$$

Donde A es el coeficiente aversión relativa al riesgo y θ es la medida de preferencia entre la vivienda y el ahorro. El coeficiente de aversión al riesgo tiene unos valores que oscilan entre cero y uno. $0 < A < 1$

La función de utilidad del portafolio está compuesto por dos activos: S_t representa el valor total de los ahorros (Depósitos de ahorros o Certificados de Depósito a Término fijo ofrecidos por el sistema financiero.) y H_t es el activo que representa el valor total de la vivienda.

La restricción del modelo está dada por el ingreso disponible, el cual se distribuye entre el consumo \bar{C}_t , ahorro $i_t S_t$ y el pago de la hipoteca $i_t M_t$.

$$Yd_t = \bar{C}_t + i_t S_t + i_t M_t \quad (44)$$

El efectivo en caja en el período t es:

$$X_t = Yl_t + Y_t \quad (45)$$

Sobre esta base teórica, se presenta una manera alternativa de analizar la función de utilidad del portafolio a partir de una función exponencial tipo Cobb-Douglas, que combina la participación de dos activos del portafolio: la vivienda y el ahorro, con la tasa de interés y la aversión al riesgo del inversionista.

5.1 El modelo de utilidad tipo Cobb-Douglas incluye el ahorro y la vivienda

En éste caso el portafolio está compuesto por dos activos: la vivienda y los depósitos de ahorro, estableciendo que el valor de la vivienda está dado y que el agente asume una parte de la misma en forma de hipoteca y desea obtener alguna rentabilidad a través de su alquiler. Asimismo, considera rentable depositar parte de sus recursos en el sistema financiero. Al determinar la utilidad del portafolio se puede contrarrestar el riesgo de mercado que genera la variación de la tasa de interés sobre el pago de la hipoteca y definir la relación de cada activo con la tasa de alquiler y la tasa de interés de los depósitos de ahorro.

Sea la siguiente función de utilidad compuesta por dos activos el valor de la vivienda y el ahorro total y se expresa de la siguiente manera:

$$U = U(H_t, S_t) \quad (46)$$

sujeta a la siguiente restricción.

$$Yd_t = \bar{C}_t + i'_t S_t + i_t M_t \quad (47)$$

ρ : representa el porcentaje de la casa pagada con recursos propios.

$1 - \rho$: porcentaje del valor total de la casa que está financiada por el banco.

r_t : tasa de alquiler de la vivienda, si el propietario decide alquilarla.

i'_t : Tasa de interés que se paga por los depósitos de ahorro.

i_t : Tasa de interés que se paga por la hipoteca

M_t Valor total de la Hipoteca.

\bar{H}_t : El valor de la casa está dado.

Yd_t : Ingreso disponible del hogar en el período t

\bar{C}_t : Gasto corriente del Hogar está dado.

Donde θ , es el porcentaje de participación del ingreso dentro del gasto de vivienda representado por el pago de la cuota del crédito y $1 - \theta$: es la proporción del ingreso dedicada al ahorro.

El valor de la casa se representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{H}_t &= \rho \bar{H}_t + (1 - \rho)(H_t r_t - i_t M_t) \\ (1 - \rho)\bar{H}_t &= (1 - \rho)(H_t r_t - i_t M_t) \end{aligned} \quad (48)$$

$\bar{H}_t = H_t r_t - i_t M_t$. En esta ecuación el flujo neto de la casa se define como la diferencia entre la tasa de alquiler por el valor de la casa y el pago de la hipoteca, cuando esta diferencia se reduce, el propietario del inmueble se expone a un menor riesgo de pérdida.

$$\begin{aligned} i_t M_t &= +H_t r_t - \bar{H}_t \\ Yd_t - \bar{C}_t + \bar{H}_t &= i'_t S_t + H_t r_t \end{aligned}$$

$D = Yd_t - \bar{C}_t + \bar{H}_t$. El ingreso disponible, el consumo y el valor de la casa están dados y se simplifican a través de D .

$$D = i'_t S_t + H_t r_t \quad (49)$$

$$\mathcal{L} = U(H, S) - \lambda(S_t i'_t + H_t r_t - D)$$

$$\frac{\partial U / \partial H}{\partial U / \partial S} = \frac{i'_t}{r}$$

Aplicando la función de Utilidad Cobb-Douglas a la utilidad del portafolio

$$\frac{U(H_t^\theta S_t^{1-\theta})^{1-A}}{1-A} \quad (50)$$

Donde A representa el parámetro de Aversión al riesgo $0 > A \leq 1$.

$$\frac{\partial U}{\partial S} = (1 - \theta)H_t^\theta S_t^{-\theta}$$

$$S_t^* = \frac{Di'_t(1-\theta)}{[\theta r^2 + (1-\theta)i'_t]} \quad (51)$$

La cantidad óptima de ahorro (ecuación 50) (Díaz, 2011, pág. 81) establece está determinada positivamente por la tasa de interés que el mercado ofrece para depósitos ahorro y negativamente por la tasa de alquiler al cuadrado (r^2), cuando ésta última aumenta, el inversionista disminuye la proporción de recursos en depósitos de ahorro, dados los gastos financieros que implican los créditos de vivienda y las cuentas de ahorro. Por lo tanto, si la tasa de interés de los depósitos y la de otros tipo de captaciones aumenta, el valor óptimo del ahorro se incrementa incidiendo positivamente en la rentabilidad del portafolio.

Reemplazando la ecuación (51) en la (49) se obtiene la siguiente función:

$$H_t^* = \frac{D\theta r_t}{[(\theta r^2 + (1-\theta)i'_t)]} \quad (52)$$

La ecuación (52) establece que la rentabilidad de la vivienda se relacionada directamente con la tasa de alquiler r_t dada la contribución de recursos a los gastos de vivienda θ , pues un aumento en la tasa de alquiler incrementa de manera sensible la rentabilidad de la vivienda y está afectada inversamente por la sumatoria de la tasa de alquiler al cuadrado y la tasa de interés de los depósitos de ahorro por sus participaciones. Es de anotar que la tasa de alquiler está sujeta al comportamiento de la tasa de inflación.

Finalmente, la función de utilidad óptima se define como (Díaz, 2011, pág. 82):

$$U(H_t^*, S_t^*) = \frac{U(H_t^{*\theta} S_t^{*(1-\theta)})^{1-A}}{1-A} \quad (53)$$

La ecuación anterior demuestra que la función de utilidad del Hogar depende positivamente del valor óptimo de la casa (H_t^*) y de la cantidad óptima de ahorro (S_t^*) la cual está influenciada positivamente por la tasa de interés e inversamente por el coeficiente de aversión relativa al riesgo ($1-A$).

6.2 El modelo de utilidad tipo Cobb-Douglas incluye el consumo y la vivienda

Otro portafolio está compuesto por una función de utilidad que depende de dos activos los gastos corrientes C_t y los gastos en vivienda H_t . Asimismo, la función de utilidad del portafolio presenta los siguientes productos (Díaz, 2011): $U(H_t, C_t) = \frac{(H_t^\theta, C_t^{1-\theta})^{1-A}}{1-A}$ (54)

Sujeto a.

$$Yd_t = P_t C_t + i_t M_t \quad (55)$$

$\bar{H}_t = H_t r - i_t M_t$: es el flujo neto de la casa

$$i_t M_t = +H_t r_t - \bar{H}_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - \lambda p = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial H} = \frac{r}{p}$$

Donde:

Yd_t : ingreso disponible del hogar

M_t : valor de la hipoteca.

r_t : tasa de alquiler que recibiría al hogar por arrendar el inmueble

C_t : gasto corriente del hogar.

A : parámetro de aversión al riesgo. $0 < A \leq 1$

ρ : valor de la casa pagada con recursos propios.

$1 - \rho$: % del valor de la casa financiada que está financiada.

La función exponencial de utilidad está definida como (Yao et al., 2005, p. 197-239):

$$U(H_t, C_t) = \frac{U(H_t^\theta C_t^{1-\theta})^{1-A}}{1-A} \quad (56)$$

Donde θ : porcentaje de participación del ingreso dentro del gasto de vivienda

$1 - \theta$: proporción del ingreso dedicada al gasto corriente.

$$C_t > 0 ; H_t > 0$$

La condición de primer orden:

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \theta H_t^{1-\theta} C_t^{1-\theta}$$

$$C_t^* = \frac{(1-\theta)r_t H_t}{\theta} \quad (57)$$

$$Yd_t = P_t C_t + i_t M_t$$

$$H_t = \frac{D - P_t C_t}{r_t} \quad (58)$$

Después de unas manipulaciones algebraicas tenemos que es consumo óptimo se define como:

$$C_t^* = (1 - \theta)D \quad (59)$$

El gasto del consumo es una función depende directamente de D y la propensión marginal a consumir. Igualando (57) y (59) definimos H^* como:

$$H_t^* = \frac{D\theta}{r_t} \quad (60)$$

Esta ecuación indica que el gasto dedicado al pago de la casa depende directamente de D es decir del Ingreso disponible y el valor de la casa, dada la proporción del ingreso destinado a cubrir el pago de la casa (θ), e inversamente de la tasa de alquiler r_t , es decir que si el hogar decide alquilar el inmueble se reduce los gastos dedicados al pago de la amortización de la vivienda (Véase tabla 2). La función de utilidad óptima se define como:

$$U(H_t^*, C_t^*) = \frac{U(H_t^{*\theta} C_t^{*(1-\theta)})^{1-A}}{1-A} \quad (61)$$

La anterior función de utilidad (61) demuestra que el gasto en vivienda representa una parte importante de los hogares junto con el consumo por lo tanto buena parte del pago del activo inmobiliario debe cubrirse para satisfacer el bienestar de los hogares (Díaz, 2011, pág. 84).

A continuación, se presentan las siguientes tablas que resumen las principales diferencias entre los aportes propuestos por Markowitz de la teoría clásica del portafolio y los principales autores que incluyen la vivienda en el análisis del portafolio óptimo, para compararlo con los aportes del autor de este artículo.

Tabla 2. Cuadro comparativo modelo portafolio de inversión propuesto por el autor

El modelo para aquellos hogares que tienen crédito de vivienda pero disponen de posibilidad de ahorro propuesta del autor (Díaz, 2011)	
Método media varianza 2 activos ahorro S_t y vivienda H_t	Función utilidad del portafolio tipo Cobb Douglas, ahorro S_t y vivienda H_t
<p>La riqueza del hogar W_t se distribuye en dos activos: la del ahorro y el valor total de la vivienda.</p> $W_t = S_t + P_t H_t$ <p>$h_t = \frac{P_t H_t}{W_t}$: es la participación de la vivienda en la riqueza total.</p> <p>$s_t = \frac{S_t}{W_t}$: participación del ahorro invertido en activos financieros sobre la riqueza en el período t.</p> <p>El problema de maximización se define como:</p> $\text{Max}_w \left\{ s_t \mu_{st} + h_t \mu_{ht} - \frac{A}{2} [s_t, h_t] \Omega [s_t, h_t]^T \right\}$ <p>Sujeto a las siguientes restricciones:</p> $1 = h_t + s_t$ $s_t \geq 0, \quad h_t > 0$ <p>La solución óptima del ahorro en el portafolio es:</p> $s^* = \frac{[\mu_s - \mu_h + (\sigma_h^2 - \sigma_s \sigma_h) A]}{A(\sigma_s - \sigma_h)^2}$	<p>La función de utilidad del hogar se representa como:</p> $U = U(H_t, S_t)$ <p>sujeto a:</p> $Yd_t = \bar{C}_t + i_t S_t + i_t M_t$ $s^*_t = \frac{D i'_t (1 - \theta)}{[\theta r^2 + (1 - \theta) i'_t]}$ <p>Esta función establece que la cantidad óptima de ahorro S_t^*, en el periodo t está afectada positivamente por la tasa de interés de captación y negativamente por la tasa de alquiler al cuadrado, cuando ésta última tasa aumenta, el inversionista disminuye la proporción de recursos en depósitos de ahorro, dadas las participaciones que tiene para utilizar sus recursos para pagar los gastos financieros de la vivienda y el ahorro.</p> $H_t^* = \frac{D \theta r_t}{[(\theta r^2 + (1 - \theta) i'_t)]}$ <p>La rentabilidad de la vivienda H_t^* se relaciona directamente con la tasa de alquiler r_t dada la contribución de recursos a los gastos de vivienda θ, donde un aumento en la tasa de alquiler incrementa de manera sensible la rentabilidad de la vivienda y está afectada inversamente por la</p>

<p>La proporción óptima de la rentabilidad de vivienda es:</p> $h^* = 1 - s^*$ <p>A: Representa la Aversión al riesgo y es mayor que cero. El modelo relaciona el comportamiento de los hogares frente al riesgo con el riesgo del mercado, para determinar la proporción del ahorro óptimo.</p>	<p>sumatoria de la tasa de alquiler al cuadrado y la tasa de interés de los depósitos de ahorro por sus participaciones.</p> <p>La función de Utilidad del portafolio que incluye H^* y S^* es:</p> $U(H_t^*, S_t^*) = \frac{U(H^{*\theta} S^{*1-\theta})^{1-A}}{1-A}$ <p>Donde A es la aversión al riesgo está entre $0 > A \leq 1$.</p>
--	---

Fuente: elaborado por el autor. (Diaz, 2011, pág. 86)

Tabla 3. Cuadro comparativo modelo portafolio de inversión propuesto por el autor. Continuación

Propietarios de la vivienda, pero la pagan al sistema financiero y no tienen capacidad de ahorro.	
Modelo rentabilidad de la vivienda basado en el método de media varianza	Utilidad del portafolio gasto de vivienda y consumo corriente a partir de una función Cobb-Douglas
<p>La utilidad de la casa se define como la diferencia entre el valor actual del alquiler de la casa y el valor actual de la hipoteca M_t</p> $W_t = H_t - M_t$ <p>$h_t = \frac{P_t H_t}{W_t}$: representa el valor actual del alquiler de la vivienda sobre el flujo neto de la casa.</p> <p>$m_t = \frac{M_t}{W_t}$: representa la proporción del valor total de la casa que está hipotecado, sobre el flujo neto de la casa.</p> <p>El problema de los hogares es:</p> $\max U_w \left\{ (\mu_{rt} h_t - \mu_{it} m_t) - \frac{A}{2} [(h_t, m_t) \Omega (h_t, m_t)^T] \right\}$ <p>Donde:</p> <p>μ_{rt} : media de la tasa de alquiler de la vivienda. μ_{it} : media de la tasa de interés hipotecaria. La matriz de varianzas y covarianzas es:</p> $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{ri} \\ \sigma_{ir} & \sigma_i^2 \end{pmatrix}$ <p>Sujeto a:</p>	$U(H_t, C_t) = \frac{(H_t^\theta C_t^{1-\theta})^{1-A}}{1-A}$ <p>s.a.</p> $Yd_t = P_t C_t + i_t M_t$ $C_t^* = (1 - \theta) D$ <p>El gasto del consumo es una función depende directamente de D y la propensión marginal a consumir.</p> $H_t^* = \frac{D\theta}{r_t}$ <p>Esta ecuación indica que el gasto dedicado al pago de la casa depende directamente de D es decir del Ingreso disponible y el valor de la casa, dada la proporción del ingreso destinado a cubrir el pago de la casa (θ), e inversamente de la tasa de alquiler r_t, es decir que si el hogar decide alquilar el inmueble se reduce los gastos dedicados al pago de la amortización de la vivienda.</p> <p>La función de utilidad óptima es:</p>

$Yd_t = p_{ct}C_t + m_t H_t i_t$ $1 = h_t - m_t$ <p>donde Yd_t es el ingreso disponible en el periodo t C_t : consumo de los hogares en el periodo t. A : aversión al riesgo es mayor a cero y disminuye cuando A tiende a cero. σ_i^2 : varianza de la tasa de interés. σ_r^2 : varianza de la tasa de alquiler de la casa. La tasa de alquiler óptima es: $r_t^* = Am[\sigma_p^2 + \sigma_{ir}]$ (Diaz, 2011, pág. 87)</p>	$U(H_t^*, C_t^*) = \frac{U(H_t^{*\theta} C_t^{*(1-\theta)})^{1-A}}{1-A}$ <p>(Diaz, 2011, pág. 87)</p>
---	---

Fuente: elaborado por el autor.(Diaz, 2011)

Los resultados obtenidos a través de la presentación de estas propuestas (Tablas 2 y 3), permiten discernir, que el modelo de media-varianza que incorpora la vivienda (lado izquierdo de la tabla), se considera como una extensión del modelo original propuesto por Harry Markowitz en su “Teoría del portafolio” (Markowitz, Portfolio Selection, 1952); al incluir la rentabilidad de la vivienda propia como parte de los activos del portafolio de los hogares sujeto a unas restricciones. Se consideran parámetros como la aversión al riesgo del inversionista y el riesgo de mercado de los activos, para determinar la rentabilidad del inmueble cuando está hipotecado.

Esta metodología permite integrar el análisis de la aversión al riesgo del inversionista y el comportamiento de los precios del mercado de los activos financieros, de tal manera que se articula, el comportamiento de los individuos (aversión al riesgo), cuando sus decisiones de inversión están afectadas por la incertidumbre y plantea un nuevo esquema de valoración de la vivienda al determinar una tasa optima de alquiler que mejore la rentabilidad del inmueble.

6. Conclusiones

El objetivo de este artículo fue establecer un marco de comparación teórica entre Harry Markowitz autor de la teoría del portafolio eficiente, con otros autores que bajo este enfoque teórico incorporan la vivienda dentro de la composición del portafolio como GuyLaroque, MarjorieFlavin y TakashiYamashita, para destacar la importancia de la inversión en la compra de la vivienda a través de su financiación, como activo esencial del portafolio de los hogares. La inclusión de la vivienda en el portafolio de inversión de los hogares, representa una oportunidad para relacionar el riesgo de mercado con la aversión al riesgo de los inversionistas y el peso que representa en la composición de estos portafolios.

A través de la metodología de media varianza, se propuso una tasa de rentabilidad del portafolio basada principalmente en el alquiler de la vivienda, e integrar dos conceptos la aversión al riesgo, que refleja el comportamiento individual del inversionista y el riesgo de mercado expresado por la varianza en el precio de los activos. Una variante al método original de Harry Markowitz, se utilizó para el cálculo de la optimización de los portafolios el cual a su vez permitió estimar la tasa de interés óptima para los créditos hipotecarios. Lo interesante de ésta metodología fue integrar el análisis microeconómico de los hogares a través del de su aversión al riesgo y el comportamiento de los precios del mercado de los activos financieros.

El aporte de esta revisión teórica, fue incluir dentro del portafolio de inversión de los hogares la vivienda como el activo más representativo con algún activo financiero que genere riesgo, con el fin de establecer una tasa de alquiler óptima que otorga alguna rentabilidad a los dueños del inmueble, y se articula con el comportamiento que tenga el hogar frente al riesgo de mercado cuando invierte en otros activos financieros y en la misma compra de vivienda. Así mismo, el artículo muestra la importancia de articular el análisis microeconómico de la aversión al riesgo del hogar con el riesgo de mercado, a partir de una variante que es el comportamiento de los hogares hacia el riesgo dentro del modelo de portafolio eficiente planteado por Markowitz a partir de una metodología de media varianza.

Dentro de esta propuesta teórica se encontró que al determinar un portafolio óptimo, un aumento de la tasa interés provocada por una variación en la tasa de inflación, incrementa la aversión al riesgo de los agentes económicos, lo cual es un indicador para que el gobierno disminuya la tasa, de tal manera que permita al hogar continuar con el pago de la cuota. Considerando dentro del gasto de los hogares sólo el pago de la tasa de interés, por cuanto el pago de la cuota como tal, es equivalente al valor de la inversión y equivalente a su vez a la cantidad de ahorro utilizada para la adquisición de la misma. Esta conclusión, demuestra que existe una relación directa entre el comportamiento del agente cuando es averso al riesgo y un aumento de la volatilidad en la tasa de interés, lo cual refleja el efecto de la incertidumbre en la tenencia de la vivienda cuando ésta es financiada. En Colombia, muchos hogares están en riesgo de perder su vivienda, cuando frente a unos ingresos restrictivos cualquier incremento en el pago afecta sensiblemente su tenencia, por lo tanto, “tener casa propia no es riqueza, pero no tenerla es demasiada pobreza”.

La adquisición de vivienda propia es una inversión importante para muchos hogares, dado que es un bien rentable, que permite obtener una ganancia a través de su alquiler o a través de su valorización en el tiempo dependiendo de la ubicación. Por lo tanto, la tasa de alquiler se incluye como un activo del portafolio y se puede relacionar con la aversión al riesgo del inversionista y el riesgo de mercado que genera el crédito hipotecario que financia el inmueble. Como resultado de esta relación, el inversionista es averso al riesgo, cuando la tasa de interés del crédito hipotecario que financia la inversión aumenta y por ende afecta el pago de las cuotas; sin embargo, este riesgo puede ser compensado por el alquiler del inmueble o su valorización.

El inversionista puede elegir un portafolio óptimo de acuerdo a su comportamiento reflejado en la aversión al riesgo, principalmente cuando considera activos financieros riesgosos. Si la aversión al riesgo es creciente asume menos riesgos y opta por invertir en activos seguros, la idea es cubrir el efecto del riesgo de mercado. En conclusión, el inversionista asume el riesgo de mercado cuando adquiere vivienda propia y disminuye su aversión dado que prefiere mantener el inmueble como parte de su patrimonio, si llega a considerar otro tipo de activos financieros en las decisiones de inversión.

Finalmente se incorporó la tenencia de vivienda en una función de utilidad exponencial tipo Cobb Douglas, alternándose con otras variables como el consumo y el ahorro, y considerando la aversión al riesgo que asume el hogar, la función encontrada en la ecuación No 61 demuestra que el gasto dedicado al pago de la casa depende directamente del Ingreso disponible y el valor de la casa, dada la proporción del ingreso destinado a cubrir el pago de la casa (θ), e inversamente de

la tasa de alquiler r_t , es decir que si el hogar decide alquilar el inmueble, reduce los gastos dedicados al pago de la amortización de la vivienda, mejorando su función de utilidad.

Esta investigación se puede evidenciar más adelante, utilizando la encuesta nacional de hogares suministrada por el DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadística) para demostrar la incidencia de la tenencia de vivienda propia en el portafolio de inversión de los hogares, no solo en Colombia sino que también se puede replicar a otros países. Sin embargo, sería interesante para futuras investigaciones replantear el concepto de aversión al riesgo, a partir de un concepto subjetivo, pues cada individuo tiene su propia percepción frente al riesgo y maneja sus recursos de acuerdo a sus experiencias, demostrando gran interés por preservar un activo como la vivienda, sacrificando gran parte de su consumo para cumplir con el pago de sus obligaciones financieras.

Bibliografía

(s.f.).

- Aoki, K. P. (2002). *House price, consumption and monetary policy: a financial accelerator approach*, Banco de Inglaterra - Working Paper No.169. Banco de Inglaterra .
- Campbel, J. Y. (November de 2003). "Household Risk Management and Optimal Mortgage Choice. *The Quarterly Journal of Economics*, 118(4).
- Cárdenas, M. y. (2003). "La crisis de Financiamiento hipotecario en Colombia: Causas y Consecuencias", documento que hace parte de un proyecto sobre financiamiento hipotecario en América Latina liderado por el Banco Interamericano de Desarrollo.
- Cattaneo, P. R. (Septiembre de 2011). Los fondos de inversión inmobiliaria y la producción privada de vivienda en Santiago de Chile: Un nuevo paso a la financiarización de la ciudad? (C. -C. UMR, Ed.) *EURE*, 37(112), 5-22.
- Chetty, R., Sándor, L., & Szeidl, A. (September de 2016). https://www.rajchetty.com/chettyfiles/housing_portchoice.pdf. Recuperado el 10 de Abril de 2017, de https://www.rajchetty.com/chettyfiles/housing_portchoice.pdf.
- Cocco, J. (Summer de 2005). Portfolio Choice in the presence of Housing. *The Review of financial Studies*, 18(2), 535-567.
- Cocco, J. F. (10 de February de 2005). Portfolio Choice in the Presence of Housing. (T. S. Studies, Ed.) *The Review of Financial Studies*, 18(2), 491-533.
- Cocco., C. J. (November de 2003). "Household Risk Management and Optimal Mortgage Choice. *The Quarterly Journal of Economics*., 118(4).
- Cornford, A. (June de (1996)). "Some recent Innovations in International Finance: Different Faces of Risk Management and Control. *Journal Of Economic Issues*., XXX(2), 493-508.
- De Miguel Victor, G. L. (2008). "Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy". *Review of financial Studies*.
- Deng, Y., & Quigley, J. M. (March de 2000). "Mortgage Terminations, Heterogeneity and the Exercise of Mortgage Options". *Econometría*, 68(2).
- Diaz, G. (11 de Julio de 2011). *El riesgo de mercado y su incidencia en los portafolios de inversión de las economías domésticas*. Tesis de grado

doctorado en Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, Maestría en Ciencias Económicas, Bogotá.

- Díaz, V. G. (2011). http://www.bdigital.unal.edu.co/3560/1/EL_RIESGO_DE_MERCADO_Y_SU_INCIDENCIA_EN_LOS_PORTAFOLIOS_DE_INVERSION.pdf. Recuperado el 15 de 04 de 2016, de http://www.bdigital.unal.edu.co/3560/1/EL_RIESGO_DE_MERCADO_Y_SU_INCIDENCIA_EN_LOS_PORTAFOLIOS_DE_INVERSION.pdf
- Flavin, M. (2009). "Housing, Adjustment Costs, and Endogenous Risk Aversion". Preliminary version prepared for the Bank of Spain conference on Household Finance and Macroeconomics., UCSD NBER.
- Flavin, M., & Takashi, Y. (March de (2002)). Owner-Occupied Housing and the Composition of the Household Portfolio. *The American Economic Review*, 92(1).
- Flemming, J. A. (1973). "The consumption function when capital markets are imperfect" . *Oxford Economic Papers*, 25.
- Fratantoni Fratantoni, M. (1996). "Housing Wealth, Precautionary Saving and the Equity Premium." Unpublished manuscript, Johns Hopkins University.
- Fuentes, A. (1999). *La vivienda como un activo de los hogares*. CEPAL, Montevideo.
- Gallin, J. (April de 2003). "The long run relationship between Houses Prices and Income: evidence from local housing Markets". *Finance and Economics Discussions Series*, 2003(17).
- Goetzmann, W. N. (1993). "The Single Family Home In The Investment Portfolio. (C. University, Ed.) *Journal of Real Estate of Financial and Economics*(6), 201-222.
- Grossman, S. J. (January de 1990). Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods. *Econometría*, 58(1), 25-51.
- Guillen, R. H. (Noviembre de 1997). Globalización financiera y riesgo sistemático. *Revista de Comercio Exterior*, 47(11).
- Jorion, P. (2003). *Valor en Riesgo*. (U. d. California., Ed.) México D.F.: Limusa S.A.
- Maggnin, J. L. (2007). *Managing Investment Portfolios a Dynamic Process* (Third Edition ed.). (I. John Wiley and Sons, Ed.) New Jersey, USA: CFA Institute.
- Marin, J., & Rubio, G. (2001). *Economía Financiera*. (Antonio Bosch Editor, Ed.)
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. En M. Harrt, & 1. Yale University Press (Ed.), *Portfolio Selection efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. En M. Harrt, & 1. Yale University Press (Ed.), *PORTFOLIO SELECTION EFFICIENT DIVERSIFICATION OF INVESTMENTS*. New York: John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Meade, G. V. (1996). "Forecasting Volatility for Portfolio Selection". *Journal of Business Finance and Accounting*, 23(1), 125-143.
- Merton, R. (September de 1972). Journal of Financial and Quantitative Analysis. *An analytic derivation of the efficient portfolio frontier*(7), 1851-1872.

- Meullbauer, J. (1996). "Housing credit constraints and transactions costs in the demand for housing: a theoretical analysis". Mimeo, Nuffield College.
- Meyer, J. (June de 1987). Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization. (A. E. Association, Ed.) *The American Economic Review*, 77(3), 421-430.
- Muellbauer, J. a. (1997). "Booms and Busts in the UK Housing Market". . *The economical Journal November. Royal Economic Society*.
- Nabcini, R. &. (2008). Mean-Variance Econometric Analysis Household Portfolios. (U. d. Brescia-Italy., Ed.)
- Pelizzon, L. &. (June de 2008). "Are Household Portfolios Efficient? An Analysis Conditional on Housing". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 43(2), 401-432.
- Perali, F. (2000). *Applied Economics with special interest on Political Economy. Production Economics, Labour Economics, Household Economics, and Econometrics*.
- Poterba, J. M. (1997). "Household Portfolio Allocation over the life Cycle". Cambridge Working Pape No. 6185, National Bureau of economic Research.
- Pratt, J. W. (Jan-April de 1964). Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, Vol 32 .
- Ross, S. (1976). The arbitrage Theory of Capital Assets Pricing. *Journal of economic Theory*.
- Ross, S., & Randall, Z. (1976). Risk and Return Real State. *Journal of Real State Finance in Economics*, 2(4), 175-90.
- Sanford J. Grossman & Guy, L. (1990). Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods. *Econometrica*, 58(1).
- Sharpe, W. (1964). "Capital Assets Prices: a theory of market under conditions of risk. *Journal of finance*(19).
- Source., R. Y. (Spring de 2005). Optimal Consumption and Portfolio Choices with Risky Housing and Borrowing Constraints. *he Review of Financial Studies*, 18(1), 197-239.
- Thomas W, E. (June de 1981). "Necessary and sufficient conditions for the mean-variance portfolio model with constant risk aversión". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, XVI(2), 169-176.
- Tobin, J. (February de 1958). "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk". "Review of Economics Studies", XXV(1), 65-86.
- Varian, H. (Winter de 1993). A portfolio Nobel Laureates, Markowitz, Miller and Sharpe. *Journal of Economics Perspectives*, 7(1), 159-169.
- Varian, H. (2010). Microeconomía intermedia. Un enfoque actual. En A. B. Editor (Ed.). Barcelona, España.
- Vilariño, S. A. (2001). "Turbulencias Financieras y Riesgos de Mercado". Madrid: " Pretince Hall" Financial Times.
- Yamashita, F. M. (March de 1998). *Owner occupied housing and the composition of the household portfolio over the life cycle*. Working paper 6389, Universidad de California, San Diego.
- Zhang, R. Y. (Spring de 2005). Optimal consumption and Portfolios Choices with risky housing and Borrowing Constraints". *The Review of financial Studies*.

Revista Mexicana de Economía y Finanzas, Vol. 12, No. 3, (2017), pp. 89-119

Zisler, S. A. (1991). Risk and Return in Real Estate. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 4(2), 175-90.